# The 43rd International Physics Olympiad — Theoretical Competition

**Tartu, Estonia — Tuesday, July 17th 2012**

- 理論試験は5時間です。大問は3題あり，30点満点です。**3つの大問の配点は同じではありません。**
- **試験開始のベル（短い連続した3つの音）による合図があるまで，問題に入れられた封筒を開いてはならない。**
- **許可なくその場を離れてはならない。** もし，電卓が壊れたとかトイレへ行きたいなどのときは，あなたの席にある長い柄の付いた (“HELP” または “TOILET” の旗を，あなたの席のボックスの壁の上に，担当者が到着するまで掲げてください。
- **答には，問題文でハイライトを付けた量を用いること。** また必要なら，基礎物理学定数を含めてもよい。そこでもし，“箱の高さが $a$ 幅が $b$” と書かれていれば，$a$ は答に用いてよいが $b$ は，他のどこかでハイライトが付けられていなければ用いることはできない。小問中でハイライトが付けられている量は，その小問の答のみに用いることができる。問題の前文でハイライトの付けられた量は，すべての問題の答，すなわち，任意の小問の答に用いることができる。
- 用紙の表側だけを用いなさい。
- 各問題の解答は，指示された**解答用紙（Solution Sheets）**(ヘッダー部分の番号と絵文字で確認) に書きなさい。各問題で，解答用紙に通し番号が付けられているので，それにしたがって用紙を使ってください。 **常にどの問題のどのパート (PART) の質問に答えているかマークしなさい。** 最終的な答は，**答案用紙（Answer Sheets）**の適切な解答欄の中に書きなさい。採点して欲しくないことは，下書き用紙（**Draft** papers）に書きなさい。もし採点して欲しくないこと（イニシャルや間違った解答）を解答用紙に書いたときは，それに×印を付けなさい。
- ある問題に，用紙をさらに必要とする場合，“HELP” の旗を掲げ，問題番号を担当者に告げなさい。そうすれば，2枚の解答用紙が与えられます（何回でも）。
- **文章はできるだけ少なくし，**なるべく方程式や数字，図やグラフを使いなさい。
- 解答の残り時間が30分になると，最初の1回の音による合図があります。残り時間が5分になると，2回目の連続した2つの音による合図があります。3回目の連続した3つの音は，解答時間の終了の合図です。 **3回目の音のよる合図があったら，ただちに書くのを止めなければならない。**すべての用紙を机の上の封筒の中に入れなさい。**どの用紙も部屋から持ち出すことはできない。**最終の音による合図がある前に，解き終わったならば，旗を掲げなさい。

## Problem T1. Focus on sketches *(13 points)*

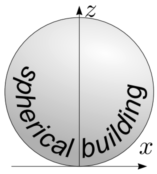
### Part A. 弾道 *(4.5 points)*

初速 $v_0$ で投げられたボールの $x-z$ 面内での運動を考える。$x$ 軸を水平に，$z$ 軸を鉛直上方にとり，鉛直下向きの重力加速度を $g$ とする。空気抵抗を無視する。

**i. (0.8 pts)** 一定の初速 $v_0$ で投げられたボールの投射角を調整すると，領域

$$z \le z_0 - kx^2;$$

にある任意の標的にボールを衝突させることができる。このとき，$z_0$ と $k$ を定めよ。




**ii. (1.2 pts)** 次に，打ち上げの場所を地上 $z=0$ で自由に選べ，また必要に応じて打ち上げの角度を調整できるものとする。そこで，初速 $v_0$ を最小にして半径 $R$(図を見よ) の球状の建造物の最高の頂点に小球を打ち込むようにしたい。頂点に達するまでに建造物に衝突して跳ね返されることがないようにする。この最適な小球の軌道の形状を定性的に描け (解答用紙の解答欄の図に示せ)。

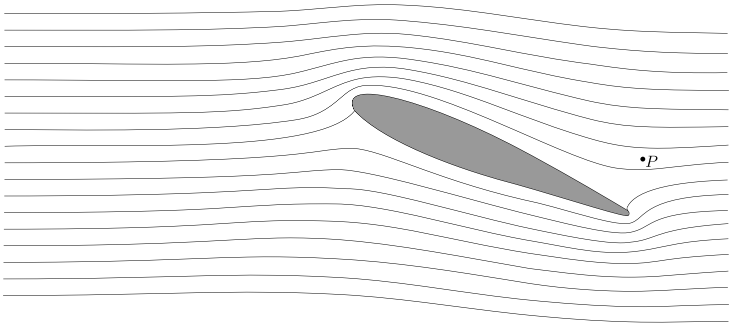
**iii. (2.5 pts)** 半径 $R$ の球状建造物の最高頂点に到達するために必要な打ち上げの速さの最小値 $v_{\min}$ を求めよ。

La Gï£ · ode, Parc de la Villette, Paris. Photo: katchooo/flickr.com

### Part B. 翼の周囲の空気の流れ *(4 points)*

この問題では，次の情報が有益である。管内の流体 (液体もしくは気体) の流れについては，流速 $v$ が音速よりも十分小さいとすると，流線に沿って $p+\rho gh+\frac{1}{2}\rho v^2=\mathrm{const.}$ が成り立つ。ここで，$\rho$ は密度であり，$h$ は高さであり，$g$ は重力加速度，$p$ は静水圧である。流れのパターンは変動しないと仮定して，流線は流体粒子の軌道として定義される。注：$\frac{1}{2}\rho v^2$ は動的圧力と呼ばれる。

次図に，飛行機の翼の断面と翼の周囲の空気の流れが示されている（翼を基準とした座標系で示されている）。以下の仮定をする。(a) 空気の流れは純粋に 2 次元であり，流れの速度ベクトルは紙面に平行である。(b) 流れのパターンは飛行機の速さには依らない。(c) 無風である。(d) 動的圧力は大気圧 $p_0=1.0\times10^5\,\mathrm{Pa}$ に比べて十分小さい。スケール（物差し）を用いて，解答用紙の図を測定せよ。

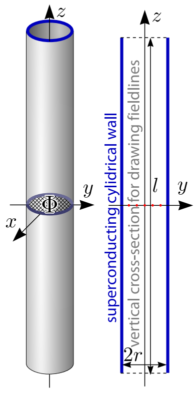



**i. (0.8 pts)** もし，飛行機の対地速度が $v_0=100\,\mathrm{m/s}$ ならば，図に示された点 $P$ での空気の地面に対する速さ $v_P$ はいくらか?

**ii. (1.2 pts)** 相対湿度は，与えられた温度における飽和蒸気圧に対する蒸気圧の比である。ここで，飽和蒸気圧は，蒸気と液体が平衡にあるときの蒸気圧である。相対湿度が高い場合，飛行機の対地速度が増加すると，水蒸気が水滴となり，翼の背後に付着する。ある点 $Q$ において水滴が現れる。解答用紙の図に点 $Q$ を記せ。また，なぜその点を考えたか，その理由を定性的に（必要な公式に短い説明をつけて）説明せよ。

**iii. (2.0 pts)** 次のデータを用いて水滴が現れる限界速度 $v_{\mathrm{crit}}$ を数値で求めよ。大気の湿度は $r=90\%$，空気の定圧比熱は $c_p=1.00\times10^3\,\mathrm{J/kg\cdot K}$，大気の温度が $T_a=293\,\mathrm{K}$ のときの飽和蒸気圧は $p_{sa}=2.31\,\mathrm{kPa}$，$T_b=294\,\mathrm{K}$ のときは $p_{sb}=2.46\,\mathrm{kPa}$ である。その際，近似によっては，大気の定積比熱 $c_V=0.717\times10^3\,\mathrm{J/kg\cdot K}$ を用いてよい。

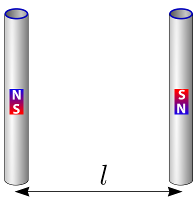
### Part C. 磁力線ストロー *(4.5 points)*




超伝導物質からなる円筒管 (superconducting cylindrical wall) を考える。管の長さは $l$，管の内半径は $r$ で常に $l\gg r$ である。管の中心を原点に，管の中心軸に沿って $z$ 軸をとる。管の中心断面 ($z=0$, $x^2+y^2<r^2$) を通る磁束 $\Phi$ がある。超伝導物質とは，磁場が内部に侵入しない物質である (すなわち，物質内部の磁場はゼロである)。

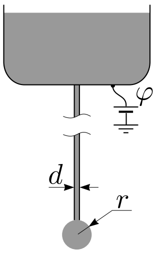
**i. (0.8 pts)** 解答欄に示された管の軸を含む断面に記された 5 個の赤い点を通る 5 本の磁束線を描け。

**ii. (1.2 pts)** 管の中央で作用する z 方向の張力 (すなわち，管の $z>0$ 部分と $z<0$ 部分の間で互いに作用する力)$T$ を求めよ。




**iii. (2.5 pts)** いま，はじめと同じもう 1 つの管が，はじめの管と平行に置かれている。2 番目の管の内部の磁束の向きは，はじめのものと逆向きであり，その中心は $y=l$, $x=z=0$ である (2 つの管は，正方形の 2 つの辺を形成している)。2 つの管の間の磁気的な力 $F$ を求めよ。

## Problem T2. ケルビンの点滴 (8 points)




この問題では，表面張力についての以下の事実を用いてよい．液体の分子は，液面に存在するよりも液中に存在する方がエネルギー的に得をする．従って，液面は表面エネルギー $U = \sigma S$ を持つと考えることができる．ここで，$S$ は液面の面積，$\sigma$ は液体の種類によって決まる表面張力係数である．液面を長さ $l$ の直線で 2 つの部分に分けたとすると，お互いに $F = \sigma l$ の力で引き合う．

水のたまった容器の底に内径 $d$ の長い金属パイプが鉛直につながれていて，その下端から水がゆっくりとしたたり落ちる（図参照）．水は電導性を持ち，表面張力は $\sigma$，密度は $\rho$ で与えられる．この問題では $d \ll r$ と仮定してよい．ここで，$r$ はパイプの下端についている水滴の半径である．水滴の半径は時間とともに徐々に大きくなり，ついに水滴は重力（重力加速度 $g$）により下端より落下する．

### Part A. 1 本のパイプ (4 points)

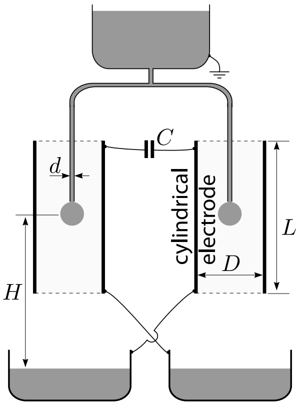
**i. (1.2 pts)** 下端より落下する直前の水滴の半径 $r_{\max}$ を求めよ．

**ii. (1.2 pts)** 十分遠方の電位を基準にしてパイプが静電ポテンシャル $\varphi$ を持つとき，半径が $r$ の水滴が持つ電荷 $Q$ を求めよ．

**iii. (1.6 pts)** この問題では半径 $r$ の球状の水滴の静電ポテンシャル $\varphi$ を徐々に増加させる．静電気力による圧力が表面張力による圧力を越えると，水滴は不安定になり，2 つに分裂する．その時の静電ポテンシャル $\varphi_{\max}$ を求めよ．

### Part B. 2 本のパイプ (4 points)

ケルビンの点滴と呼ばれる実験装置について考える．Part A で扱ったパイプを 2 本 T 字型につなげる（図参照）．それぞれのパイプの下端は，円筒形の電極「cylindrical electrode」（高さ $L$，直径 $D$ であり $L \gg D \gg r$ を満たす.）の中心にある．それぞれのパイプからは単位時間あたり $n$ 個の水滴が落ちる．水滴は高さ $H$ の所から，真下にある電導性のボウルに短時間で落ちる．ボウルは電極と図のように互い違いにつながれている．電極は電気容量 $C$ のコンデンサーでつながれている．系全体，すなわち，２つのボウルと円筒電極で構成される系の持つ全電荷はゼロであるとする．水の入った容器が接地されていることに注意せよ．




**i. (1.2 pts)** コンデンサーに電荷を与えたとき，落下する水滴が持つ電荷の絶対値 $Q_0$ を求めよ．ただし，水滴が落下する瞬間のコンデンサーの電荷を $q$ とし，(Part A-i で求めた）$r_{\max}$ を用いること．Part A-iii で考えた効果は無視してよい．

**ii. (1.5 pts)** $q$ を時間 $t$ の関数として表せ．但し，$q(t)$ は連続であると近似し，$q(0) = q_0$ とする．

**iii. (1.3 pts)** ケルビンの点滴の電位差は，落下する水滴によって増幅されるが，その働きは Part A-iii で考えた効果により妨げられる．その他にも，落下しようとする水滴をボウルが押し戻す静電気的な力の効果により，電極間の電圧に上限ができる．後者の効果による電圧の上限 $U_{\max}$ を求めよ．

## Problem T3. 原始星の誕生 *(9 points)*

以下のような恒星の誕生モデルを考えよう。球状で”希薄”に分布した星間ガスが，静止した初期状態から，自身の重力によって収縮し始めた。恒星の質量を $m$，最初の半径を $r_0$ とする。また，恒星と周囲 (恒星よりも更に希薄) の絶対温度は $T_0$ であり，恒星の初期状態での絶対温度も $T_0$ である。さらに，ガスは理想気体とみなし，1 モルあたりの質量は $\mu$，比熱比は $\gamma > \frac{4}{3}$，$G\frac{m\mu}{r_0} \gg RT_0$ と仮定する。ただし，$R$ は気体定数，$G$ は万有引力定数である。

**i. (0.8 pts)** 収縮している間のほとんどで，発生する熱は直ちに放射される。すなわち，星は周囲と熱力学的に平衡状態にある。半径が半分 ($r_1 = 0.5r_0$) になると，圧力は何倍 ($n$) になるか？　ただし，ガスの密度は，均一であるとしてよい。

**ii. (1 pt)** 半径が $r_0$ から $r_2 = 0.95r_0$ に収縮するまでの，おおよその時間 $t_2$ を見積もりなさい。収縮でガスの粒子が移動する範囲において，重力場の変化は考えなくてよい。

**iii. (2.5 pts)** ガスの圧力は無視できるほど小さいとし，球の半径が $r_0$ から非常に小さい半径まで収縮するのにかかる時間 $t_{r\to 0}$ 求めなさい。楕円軌道におけるケプラーの法則を用いなさい。

**iv. (1.7 pts)** ある半径 $r_3 \ll r_0$ において，ガスは十分な密度を持ち，周囲に熱を放射しなくなる。半径が $r_0$ から $r_3$ に収縮するまでの間に放射した熱量 $Q$ を計算しなさい。

**v. (1 pt)** 半径が $r_3$ より小さくなると，周囲に熱を放射しない。ガスの温度 $T$ を半径 $r < r_3$ で表しなさい。

**vi. (2 pts)** ついに，ガスの圧力が無視できないほど大きくなり，半径 $r = r_4$ ($r_4 \ll r_3$) において収縮は停止した。しかし，周囲への熱の放射は無視でき，温度も核融合を引き起こすほど高くはない。このような状況においては圧力はもはや均一ではないが，密度を均一と仮定して，粗い見積もりを行い，最終の半径 $r_4$ とそのときの温度 $T_4$ を求めなさい。

## Problem T1. 図面に注目 *(13 points)*

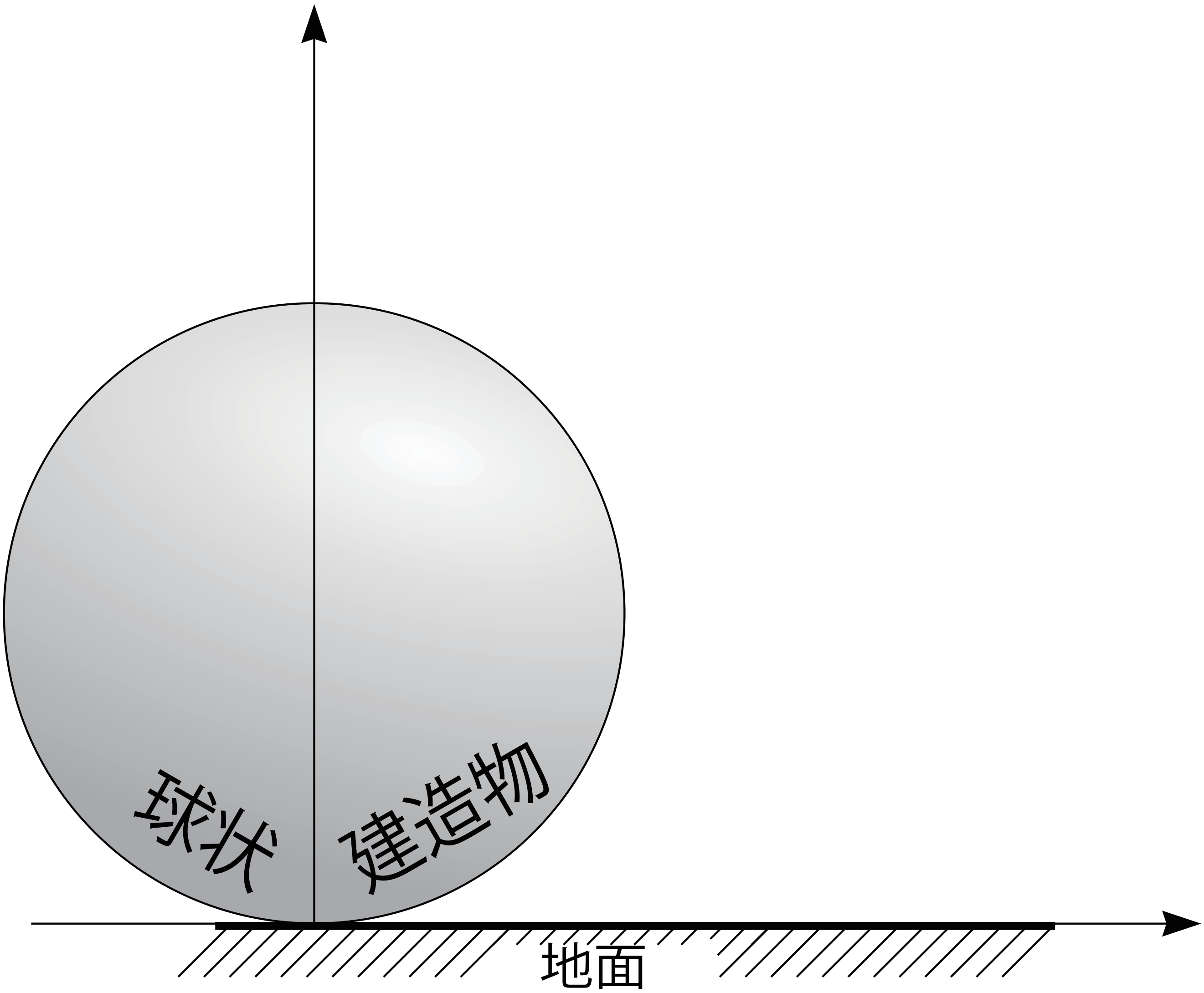
### Part A. 弾道 *(4.5 points)*

**i. (0.8 pts)**

$z_0 =$

$k =$

**ii. (1.2 pts)** 軌跡の描画




**iii. (2.5 pts)**

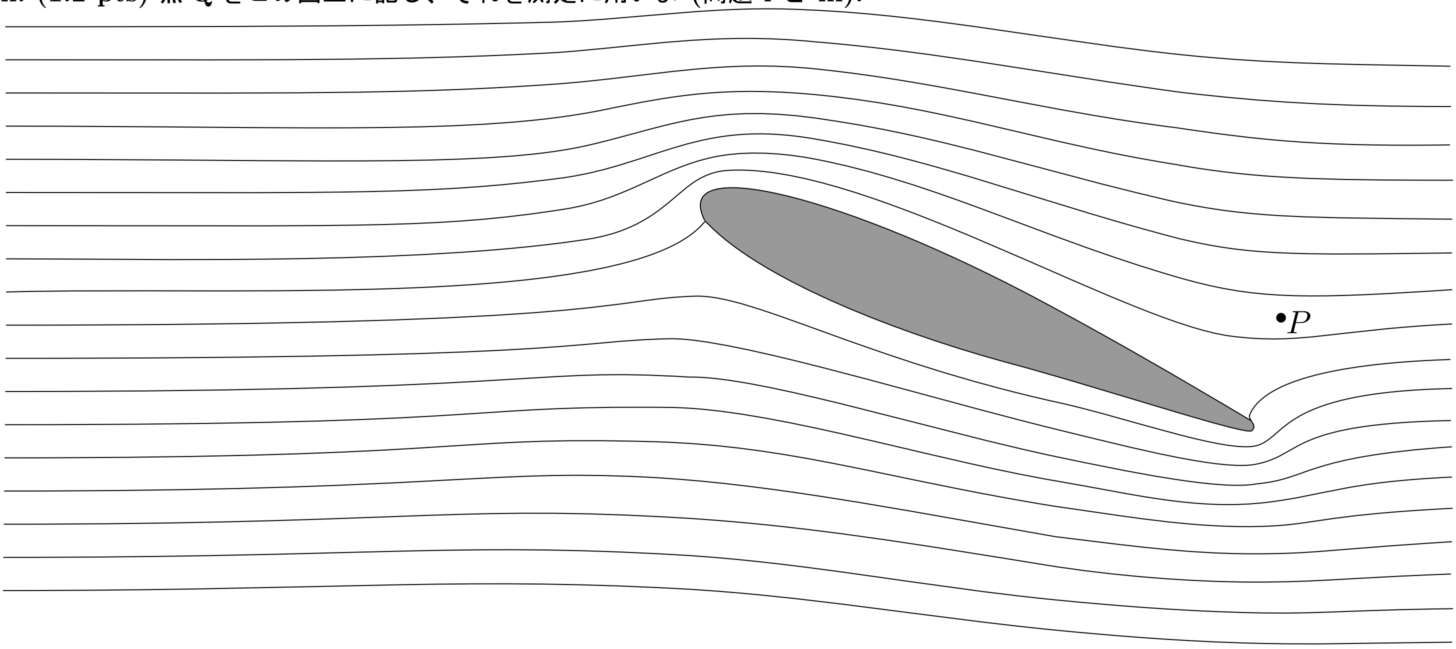
$v_{\min} =$

**Part B. 翼の周りの空気の流れ** *(4 points)*

**i. (0.8 pts)**

$v_P =$

**ii. (1.2 pts) 点 Q をこの図上に記し、それを測定に用いよ (問題 i と iii).**




**点 Q を決めた理由となる式:**

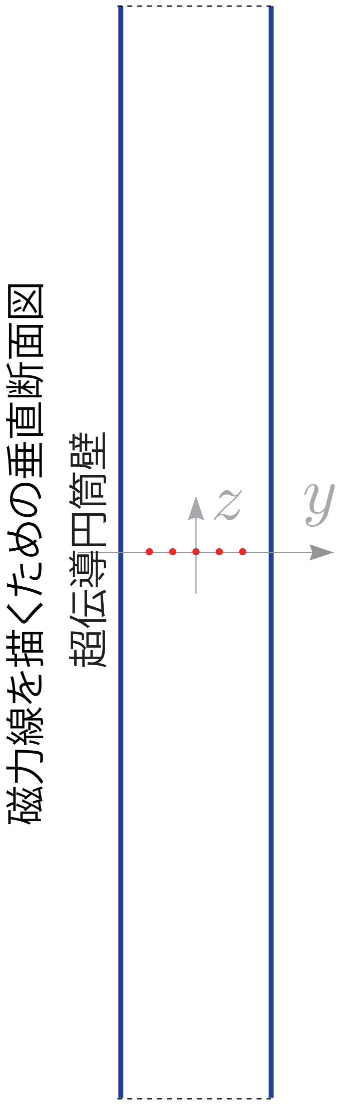
**iii. (2.0 pts)**

式: $v_{\text{crit}} =$

**数値:** $v_{\text{crit}} \approx$

## Part C. 磁力線ストロー *(4.5 points)*

**i. (0.8 pts)**
ここに 5 本の
磁力線を描け




**ii. (1.2 pts)**

$T =$

**iii. (2.5 pts)**

$F =$

## Problem T2. ケルビンの点滴 *(8 points)*

### Part A. 1 本のパイプ *(4 points)*

**i. (1.2 pts)**

$r_{\max} =$

**ii. (1.2 pts)**

$Q =$

**iii. (1.6 pts)**

$\varphi_{\max} =$

### Part B. 2 本のパイプ *(4 points)*

**i. (1.2 pts)**

$Q_0 =$

**ii. (1.5 pts)**

$q(t) =$

**iii. (1.3 pts)**

$U_{\max} =$

## Problem T3. 原始星の誕生 *(9 points)*

**i. (0.8 pts)**

$n =$

**ii. (1 pt)**

$t_2 \approx$

**iii. (2.5 pts)**

$t_{r\to 0} =$

**iv. (1.7 pts)**

$Q =$

**v. (1 pt)**

$T(r) =$

**vi. (2 pts)**

$r_4 \approx$

$T_4 \approx$