

Problem E1. 水の透磁率 (10 points)

Part A. 水面の定性的な形状 (1 point)

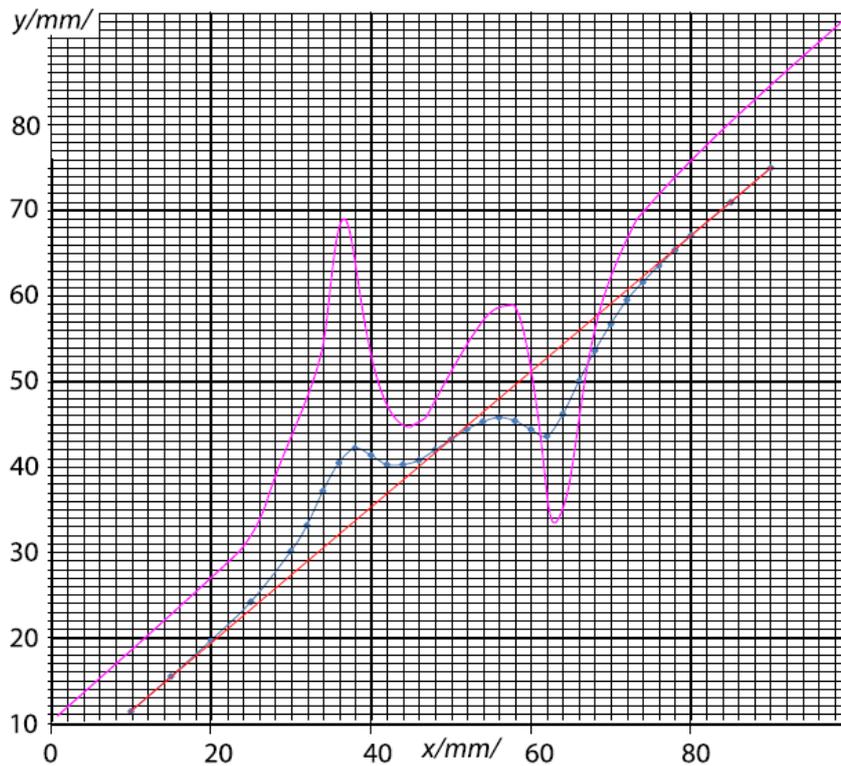
水面からの反射を観察すると、水面の形状は、最低点と比較的平らな底面のあることが容易に分かる。したがって、正解は Option D である。(Option B にも満点が与えられる。) この形状から、水は磁石から押し出されていることが分かる。これは $\mu < 1$ を意味する。($\mu > 1$ である常磁性体は磁石に引っ張られる。)

Part B. 水面の定量的な形状 (7 points)

i. (1.6 pts) スクリーン上のレーザースポットの高さ y はノギスの位置 x の関数として次の表のように表される。ここで、ミリメートル単位での y は整数値に近似してもよい。(この測定ではできるだけ高精度になることを目指した。)

x (mm)	10	15	20	25	30	32	34	36
y (mm)	11.5	15.6	19.8	24.3	30.2	33.2	37.2	40.5
x (mm)	38	40	42	44	46	48	50	52
y (mm)	42.2	41.4	40.3	40.3	40.8	42	43.2	44.4
x (mm)	54	56	58	60	62	64	66	68
y (mm)	45.3	45.8	45.4	44.4	43.6	46.2	50	53.6
x (mm)	70	72	74	76	78	80	85	90
y (mm)	56.7	59.5	61.6	63.5	65.3	67	70.9	74.9

ii. (0.7 pts)



このグラフ上には、水深の異なる2例のデータが示されている。青色の曲線は磁石までの水深が約 2 mm の場合（上の表で与えられるデータ）に対応し、すみれ色の曲線は水深が約 1 mm の場合に対応する。

iii. (0.5 pts) もし水面が水平であったなら y は x に対して線形になり角度 α_0 のタンジェントは $\tan \alpha_0 = \Delta y / \Delta x$ で与えられる。ここで Δx はレーザー・ポインターの水平方向の位置の変位であり、 Δy は対応するスポットの高さの変位である。レーザー・ポインターが両端にあるときは光線は磁石から離れた位置に当たり、そこでは実質、水面は変化していない。グラフ上で両端の点を結ぶことによって水平な水面に対応する直線が得られる（上のグラフの赤い直線）。これら両端のデータ点を使うと角度は $\alpha_0 = \arctan \frac{74.9-11.5}{90-10} \approx 38^\circ$ と簡単に計算できる。

iv. (1.4 pts) 計算を簡単にするために、与えられた式中の $y - y_0 - (x - x_0) \tan \alpha_0$ は前のグラフから赤い曲線と青い曲線の差として読み取れる。赤い曲線は $y_r = y_0 + (x - x_0) \tan \alpha_0$ という式で与えられるからである。 $\frac{1}{2} \cos^2 \alpha_0 \approx 0.31$ もまた事前に計算できる。計算すると次の表のようになる。（ $z = \tan \beta \cdot 10^5$ である。上で述べたように、この大会ではこの表の値より低い精度である有効数字 2 桁で十分である）

x (mm)	10	15	20	25	30	32	34	36
z	0	10	27	66	204	303	473	591
x (mm)	38	40	42	44	46	48	50	52
z	597	428	239	128	53	26	0	-26
x (mm)	54	56	58	60	62	64	66	68
z	-72	-145	-278	-449	-606	-536	-388	-254
x (mm)	70	72	74	76	78	80	85	90
z	-154	-74	-40	-20	-6	2	-2	0

v. (1.6 pts) 水面の高さは積分 $h = \int \tan \beta dx$ より求められる。よって、水面の高さは行ごとに順番に計算できる。前の行の高さの値に水平方向の変位 $x_{i+1} - x_i$ と平均の傾き $\frac{1}{2}(\tan \beta_{i+1} + \tan \beta_i)$ の積を足せばよい。

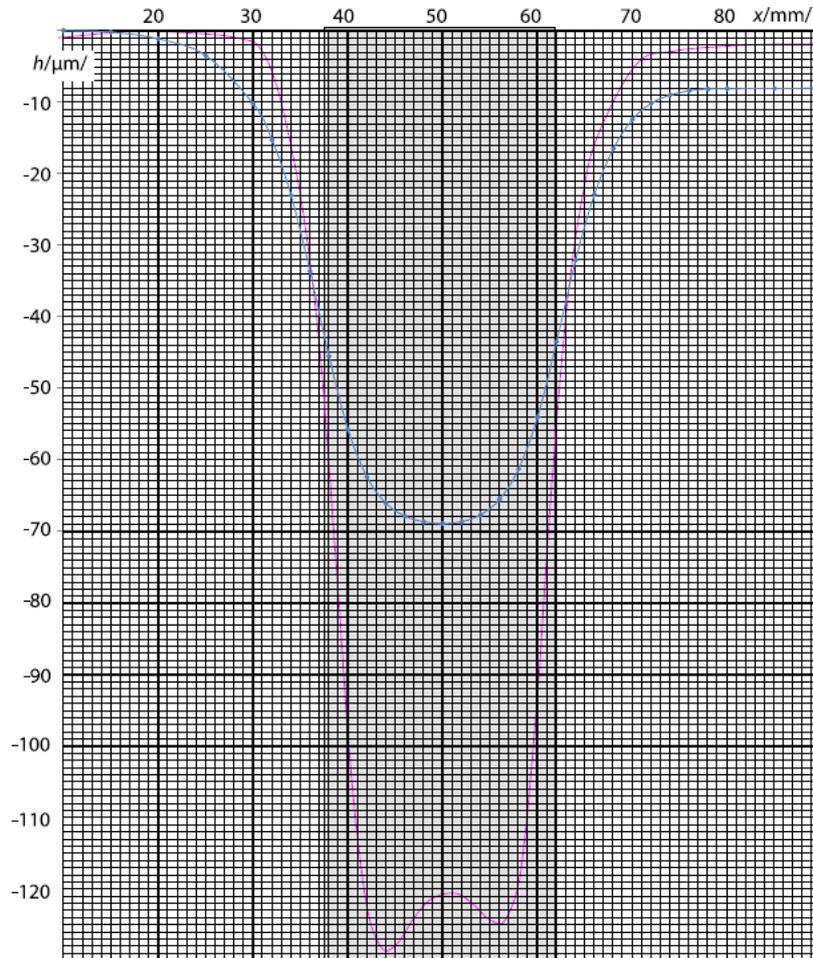
x (mm)	10	15	20	25	30	32	34	36
$-h$ (μm)	0	0	1	4	10	15	23	34
x (mm)	38	40	42	44	46	48	50	52
$-h$ (μm)	46	56	63	66	68	69	69	69
x (mm)	54	56	58	60	62	64	66	68
$-h$ (μm)	68	66	61	54	44	32	23	17
x (mm)	70	72	74	76	78	80	85	90
$-h$ (μm)	12	10	9	8	8	8	8	8

ここで表の最後の水面の高さの値も 0 になるはずである。（これは磁石の影響を受けない領域に対応する。）値が 0 でないのは測定誤差によるものである。 h から線形の値

$8 \mu\text{m} \cdot \frac{x-10 \text{ mm}}{80 \text{ mm}}$ を引くことで値の精度を上げることができる。

水面が磁石からの高さ 1 mm のところであれば，水面は磁石の中心で通常の状態から約 $120 \mu\text{m}$ 下がる。

vi. (1 pt)



前のグラフと同様に，青い曲線は水深が約 2 mm の場合（上の表で与えられるデータ）に対応し，すみれ色は約 1 mm の場合である。

磁石の位置はノギスによる測定によって見つけることができる。レーザー光線が磁石の端に当たった時に位置が分かるので，その二つの位置の間の距離を計算すればよい— 結果は約 24 mm である。また，対称性を使うことができる。水面の立ち上がりは磁石を中心として対称である。

Part C. 透磁率 (2 points)

水面は等ポテンシャル面になる。単位体積当たりの水について，磁場の相互作用によるポテンシャルは $\frac{B^2}{2\mu_0}(\mu^{-1} - 1) \approx B^2 \frac{1-\mu}{2\mu_0}$ であり，地球の重力によるポテンシャルは ρgh である。水面上ではこれら二つの和は一定である必要がある。磁石から十分離れた場所ではこ

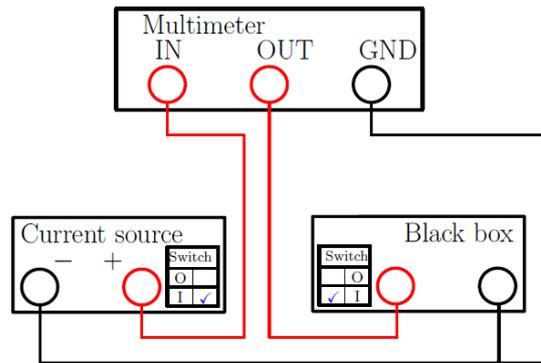
れは 0 に等しい。よって $B^2 \frac{1-\mu}{2\mu_0} + \rho gh = 0$, ゆえに $\mu - 1 = 2\mu_0 \rho gh / B^2$ である。ここで

$-h = 120 \mu\text{m}$ は磁石の中心軸上での水深を表す。前問の最後で述べた累積による誤差を補正した。 $-h$ は磁石の中心軸上での水深 (121 μm) とグラフの右側での水深の半分 (1 μm) の差として得られる。数値計算をして, $\mu - 1 = -1.2 \times 10^{-5}$ を得る。

Problem E2. 非線形ブラックボックス

Part A. コイルを含まない回路

この問題で必要とされる測定は、全て下図に示す回路のみで行うことができる。
 電流電源のスイッチが ON のとき、ブラックボックス内のコンデンサーは、非線形素子に流れる電流 $I(V_{\max})$ が電流電源の出力電流 I_0 に等しくなるまで充電される。 V_{\max} は実験のセットアップによってかわり、 $V_{\max} = 540 \pm 40 \text{ mV}$ の範囲の値になる。電源電流のスイッチが OFF であるか繋がってないとき、コンデンサーは非線形素子を通して放電する。



- i. (1 pt) コンデンサーを $V = 0$ から $V = V_{\max}$ まで充電する間、電流電源の出力はマルチメーターの精度の範囲内では定数 ($I_0 = 6.0 \text{ mA}$) であることがわかる。
- ii. (1.2 pts) 電気容量の微分による定義を用いて、ブラックボックス内のコンデンサーを流れる電流がブラックボックスにかかる電圧の時間微分から計算される。

$$I_c = \frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{dV} \frac{dV}{dt} = C(V) \dot{V}$$

適切に選んだ電圧におけるブラックボックス内のコンデンサーの電気容量を決定するには、いくつかの方法がある。

- ブラックボックスにかかる電圧がゼロに近いとき、 $I(V = 0) = 0$ なので、非線形素子を通る電流もゼロに近い。その状態で電流電源のスイッチを ON にすると、入力電流 I_0 のほぼ全部がコンデンサーを通るはずである。

$$C_0 = I_0 / \dot{V}_{\uparrow}(V = 0)$$

マルチメーターは(電流電源のスイッチを ON にした直後のように)値が急激に変わるときはその時間微分を表示できないので、初めに電流電源を逆につないでコンデンサーを逆向きに充電しておいた方が、より正確に測定することができる。

この方法による測定の例は以下ようになる。

$\dot{V}_{\uparrow}(0) (\text{mV/s})$	3.51	3.32	3.55
$C_0 (\text{F})$	1.71	1.81	1.69

$$C_0 = 1.74\text{F}$$

- ブラックボックスにかかる電圧が V_{\max} のとき、非線形素子を通る電流は I_0 である。その状態で電流電源のスイッチを OFF にすると、コンデンサーは同じ電流で放電するはずである。

$$C_0 = -I_0 / \dot{V}_\downarrow(V = V_{\max})$$

- A-iv のようにすれば、中間の電圧における電気容量を測定できる。

iii. (2.4 pts) コンデンサーの非線形性を無視したとき、ブラックボックス内の非線形素子の電流-電圧特性を測定する方法は(少なくとも)ふたつある。

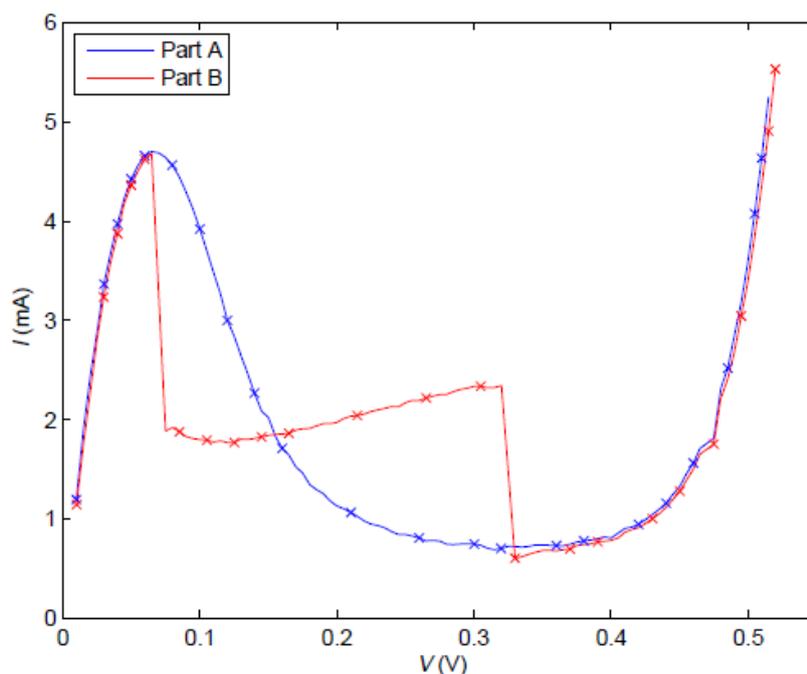
- 充電中のコンデンサーにキルヒホッフの第1法則をあてはめて、

$$I(V) = I_0 - C_0 \dot{V}_\uparrow(V)$$

下のグラフに、コンデンサーの充電から測定された $I(V)$ 特性を示す。

- 放電中のコンデンサーにキルヒホッフの第1法則をあてはめて、

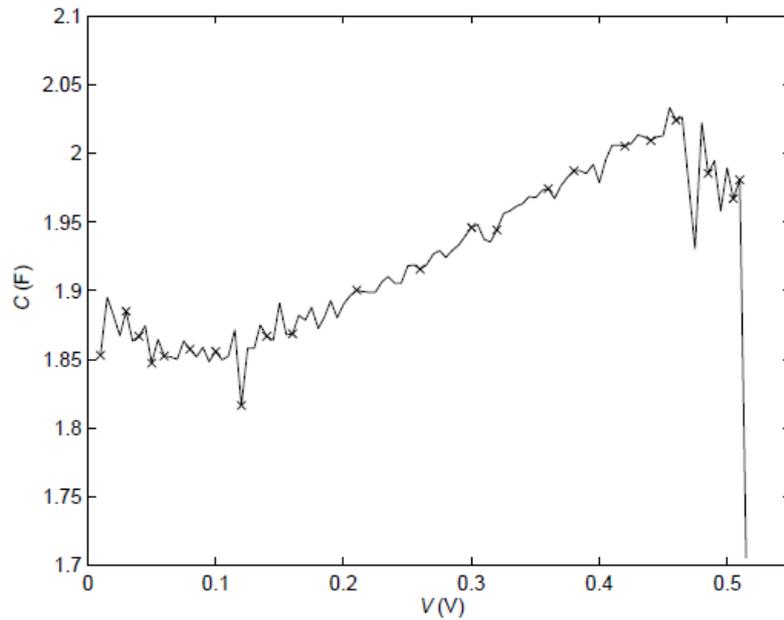
$$I(V) = -C_0 \dot{V}_\downarrow(V)$$



iv. (2.6 pts) 電気容量を算出するためには、以下の連立線型方程式から $I(V)$ を消去して、

$$\begin{cases} I_0 = \dot{V}_\uparrow C(V) + I(V) \\ I(V) = -\dot{V}_\downarrow C(V) \end{cases} \Rightarrow C(V) = \frac{I_0}{\dot{V}_\uparrow - \dot{V}_\downarrow}$$

したがってコンデンサーが充電中のときと放電中のときの両方で、同じ電圧において測定点をとる必要がある。測定結果のグラフは以下のようなになる。



Part B. コイルを含む回路 (3 points)

A-iii と同様の方法で電流-電圧特性を測定しプロットすると、微分抵抗が負の領域(微小な振動に対して、線形抵抗が負の抵抗値を持つオーム抵抗のようにふるまう領域、この場合、 $70\text{mV} < V < 330\text{mV}$)のみで値が異なるグラフが得られる。インダクタンスが働くようになると、LC 回路の振動が負の微分抵抗により(減衰されるのではなく)増幅される。微分抵抗が負になる領域では実際には電流は振動しているが、共振周波数 $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC_p}} \sim 30\text{MHz}$ (C_p は非線形素子に付随する電気容量)が高いので、測定されるのは非線形素子を通る電流の平均値である。