

## 1 3体問題とレーザー干渉宇宙アンテナ (LISA)

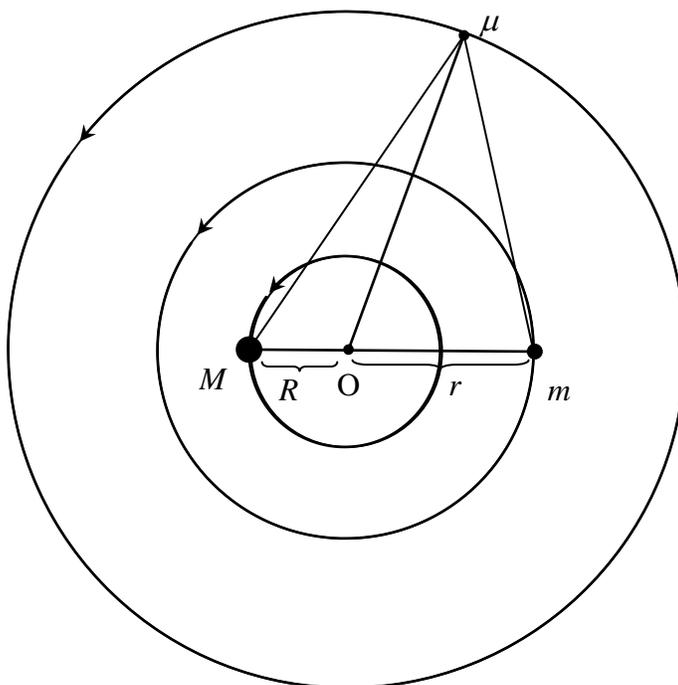


図1 3体の同一平面内における軌道

- 1.1 質量  $M$ ,  $m$  の2つの質点が, その重心を中心として, それぞれ半径  $R$ ,  $r$  の円軌道上を運動している。 $M$  と  $m$  を結ぶ線分の角速度  $\omega_0$  を  $R$ ,  $r$ ,  $M$ ,  $m$  および万有引力定数  $G$  を用いて表せ。

[1.5 点]

- 1.2 微小質量  $\mu$  の3つ目の質点が, 図1のように設置された。この  $\mu$  は  $M$ ,  $m$  の両方に対して相対的に静止し, 前問で用いた重心のまわりで円軌道を描き, 軌道は  $M$ ,  $m$  の描く軌道と同一平面内にある。ただし,  $\mu$  は  $M$  と  $m$  の同一直線上にはないとする。次の値を,  $R$  と  $r$  を用いて表せ。

[3.5 点]

- 1.2.1  $\mu$  から  $M$  までの距離  
 1.2.2  $\mu$  から  $m$  までの距離  
 1.2.3  $\mu$  から重心までの距離

- 1.3  $M = m$  の場合を考える。今、 $\mu$  に対し動径方向に（直線  $O\mu$  に沿って）微小変化が生じたとする。 $\mu$  が元の軌道を中心として動径方向に振動する角振動数はいくらか。 $\omega_0$  を用いて表せ。ただし、 $\mu$  の角運動量は保存すると仮定する。  
**[3.2点]**

レーザー干渉宇宙アンテナ（LISA）は、低振動数重力波を検出するための3台の同じ宇宙船の一団である。図2と図3に示すように、各宇宙船は正三角形の3つの頂点にある。三角形の一边の長さは、約  $5.0 \times 10^6$  km である。LISA の一団は、太陽のまわりを回る地球の軌道上をほぼ  $20^\circ$  遅れて地球を追いかけている。LISA の各宇宙船の個々の軌道は、太陽のまわりにわずかに傾いている。3つの宇宙船は1年をかけて共通の中心（3台の宇宙船の重心）のまわりを回転している。

3つの宇宙船は、互いの中でレーザー光を連続的に発すると同時に受信している。それらの船は干渉を用いて、辺の長さ（宇宙船同士の距離）のわずかな変化を測定することにより重力波を検出する。例えば、近くにある銀河内のブラックホールのような大きな質量をもつ物体同士の衝突が、重力波の発生源である。

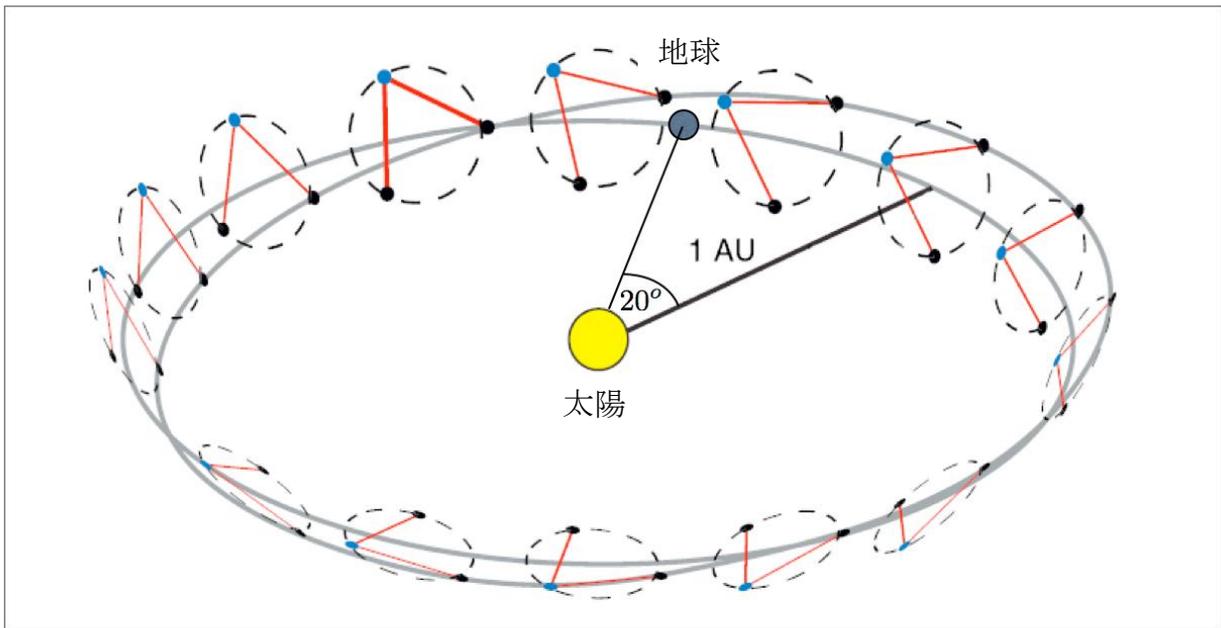


図2 レーザー干渉宇宙アンテナ（LISA）の軌道の概念図。3台の宇宙船は1年をかけて共通の中心（3台の宇宙船の重心）のまわりを回転している。最初は、3台の宇宙船は太陽のまわりの中心角で地球より  $20^\circ$  遅れて追いかけている。（D.A. Shaddock 著「レーザー干渉宇宙アンテナ（LISA）総覧」*Publications of the Astronomical Society of Australia*, 2009年, 26巻, ページ128-132から）

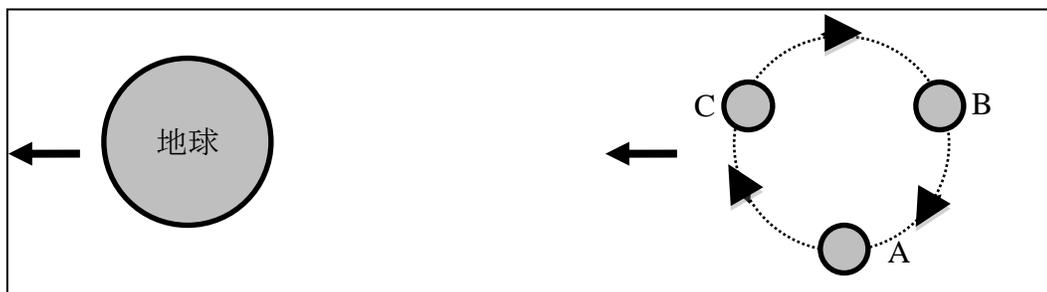


図3 太陽から見た地球を追いかける3台の宇宙船の拡大図。A, BおよびCは正三角形の頂点に位置する3台の宇宙船を示している。

- 1.4 3台の宇宙船を含む平面で、他の宇宙船に対するある宇宙船の相対速度の大きさはいくらか。 **[1.8点]**



## 2. 帯電したシャボン玉

半径  $R_0$  の球形をしたシャボン玉がある。内部の空気は密度  $\rho_i$ ，温度  $T_i$  であり，シャボン玉は、密度  $\rho_a$ ，大気圧  $P_a$ ，温度  $T_a$  の大気によって囲まれている。今，シャボン玉の膜の表面張力（円周の単位長さあたりの力）を  $\gamma$ ，密度を  $\rho_s$ ，厚さを  $t$  とする。また，シャボン玉の質量と表面張力は温度によって変化せず， $R_0 \gg t$  とする。

シャボン玉の石鹸膜と空気の境界面のうち，片側の表面積を  $dA$  だけ増加させるために必要な仕事  $dE$  は， $dE = \gamma dA$  と表すことができる。ここで  $\gamma$  は膜の表面張力である。

2.1  $\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a}$  を  $\gamma$ ， $P_a$ ， $R_0$  を用いて表せ。 [1.7 point]

2.2  $\gamma = 0.0250 \text{ Nm}^{-1}$ ， $R_0 = 1.00 \text{ cm}$ ， $P_a = 1.013 \times 10^5 \text{ Nm}^{-2}$  とし， $\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} - 1$  の数値を求めよ。 [0.4point]

2.3 初期状態として，シャボン玉の内部は温かい空気で満たされているとする。大気中で浮いていられる  $T_i$  の最小値を求めなさい。ただし， $T_a = 300 \text{ K}$ ， $\rho_s = 1000 \text{ kgm}^{-3}$ ， $\rho_a = 1.30 \text{ kgm}^{-3}$ ， $t = 100 \text{ nm}$ ， $g = 9.80 \text{ ms}^{-2}$  とする。 [2.0points]

シャボン玉が形成された後，十分に時間が経過すると外部の大気と熱平衡状態になり，静止した大気中をシャボン玉は自然と地面へ落下していく。

2.4 熱平衡状態において，シャボン玉が落下しないために大気が上昇する最小の速度  $u$  を求めよ。（Find the minimum velocity  $u$  of an updraught (air flowing upwards) that will keep the bubble from falling at thermal equilibrium.）解答は， $\rho_s$ ， $R_0$ ， $g$ ， $t$ ，および空気の粘性  $\eta$  を用いて表せ。また，この速度はストークスの法則が適用できる程度に小さく，温度が下がり熱平衡状態に至る過程で，半径は変化しないと仮定する。ストークスの法則によると，空気抵抗力は  $F = 6\pi\eta R_0 u$  と表される。

[1.6points]

2.5 空気の粘性  $\eta = 1.8 \times 10^{-5} \text{ kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$  を用いて  $u$  の数値を求めよ。 [0.4point]

ここまでの数値計算の結果で，表面張力  $\gamma$  を含む項の影響は小さいことがわかる。以下の全ての問いでは，表面張力を含む項は無視してよい。

- 2.6 この球形のシャボン玉が総電荷量 $q$ で一様に帯電したとする。新しい半径 $R_1$ の満たす方程式を $R_0$ ,  $P_a$ ,  $q$ および真空の誘電率 $\epsilon_0$ を用いて表せ。

[2.0points]

- 2.7 帯電量 $q$ はそれほど大きくなく(すなわち,  $\frac{q^2}{\epsilon_0 R_0^4} \ll P_a$ ), 半径の増加量 $\Delta R$ はごくわずかだと仮定する。 $R_1 = R_0 + \Delta R$ を満たす $\Delta R$ を求めよ。  
 $x \ll 1$ のとき,  $(1+x)^n \approx 1+nx$ を用いよ。

[0.7 point]

- 2.8 静止した大気中で, シャボン玉が浮かぶために必要な総電荷量 $q$ の大きさを,  $t$ ,  $\rho_a$ ,  $\rho_s$ ,  $\epsilon_0$ ,  $R_0$ ,  $P_a$ を用いて表せ。また, 真空の誘電率 $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$  F/mとして,  $q$ の数値を計算せよ。

[1.2 point]

3 ラザフォード散乱 100周年記念  
中性原子によるイオンの散乱

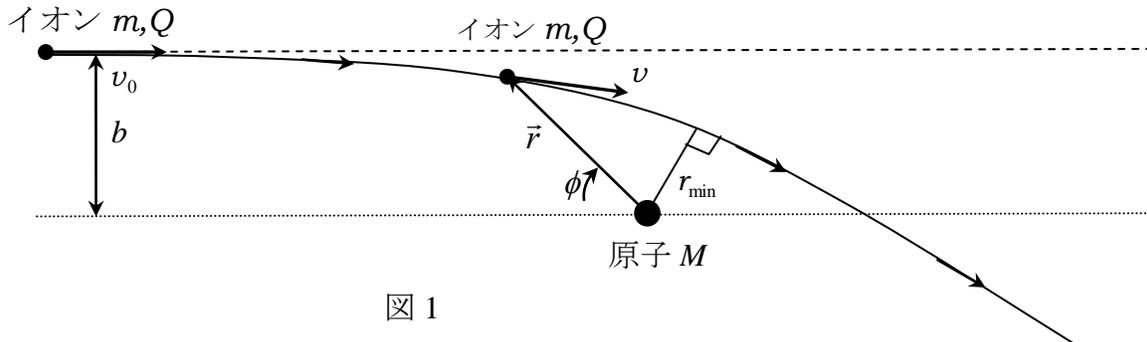


図1

質量  $m$ 、電荷  $Q$  のイオンが非相対論的な初速度  $v_0$  で十分に離れた位置から、質量  $M$  ( $\gg m$ )、分極率  $a$  の中性原子に向かって運動する。また、図1のように、衝突パラメータを  $b$  とする。

原子は、接近するイオンによって作られる電場  $\vec{E}$  によって瞬時に分極する。その結果、原子の電気双極子モーメントは、 $\vec{p} = a\vec{E}$  と与えられる。この問題では、放射による損失は無視せよ

3.1 図2において、原点  $O$  にある電気双極子  $\vec{p}$  から  $\vec{p}$  方向に距離  $r$  離れた点での電場の強さ  $\vec{E}_p$  を計算せよ。 [1.2点]

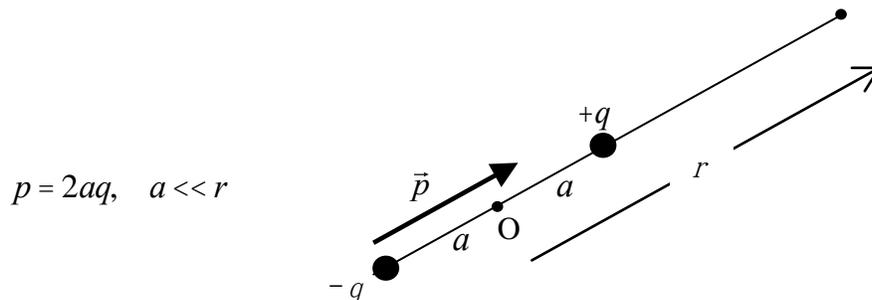


図2



3.2 偏極した原子がイオンに作用する力  $\vec{f}$  を求めよ。この力がイオンの電荷の符号にかかわらず、力が引力であることを示せ。

[3.0 点]

3.3 イオン-原子の相互作用の電氣的なポテンシャルエネルギーを  $\alpha, Q, r$  を用いて表せ。

[0.9 点]

3.4 図1に示したように、イオンが原子にもっとも近くなる距離を  $r_{\min}$  とする。この距離  $r_{\min}$  を求めよ。

[2.4 点]

3.5 もし、衝突パラメーター  $b$  がしきい値  $b_0$  (異なる結果となる境界の値を一般にしきい値という) に比べて十分に小さい場合、イオンは原子に向かってらせん状に引きつけられていく。この場合、イオンは中性になり、反対に原子は電荷を持つようになる。このような過程は“電荷交換”として知られている。このイオンと、原子の電荷交換の衝突による“電荷交換”の断面積  $A = pb_0^2$  は具体的にどのように表されるか。

[2.5 点]

Student Code    -



解答用紙

1.1  $\omega_0 =$

1.2

1.2.1  $\mu$  から  $M$  までの距離

1.2.2  $\mu$  から  $m$  までの距離

1.2.3  $\mu$  から重心までの距離

1.3  $\mu$  の角振動数

1.4 他の宇宙船に対する, ある宇宙船の相対速度の大きさ

\*\*\*\*\*



Student Code -

ページ 1/2

**ANSWER SHEET**

2.1 
$$\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} =$$

2.2  $\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} - 1$  の数値は

2.3  $T_i$  の最小値は2.4 最小の速度  $u$  は2.5  $u$  の数値は2.6  $R_1$  の満たす方程式は2.7  $\Delta R$  の式は

Student Code    -



2.8  $q$  の大きさは

$q$  の大きさの数值は

\*\*\*\*\*

3 ラザフォード散乱 100周年記念  
中性原子によるイオンの散乱

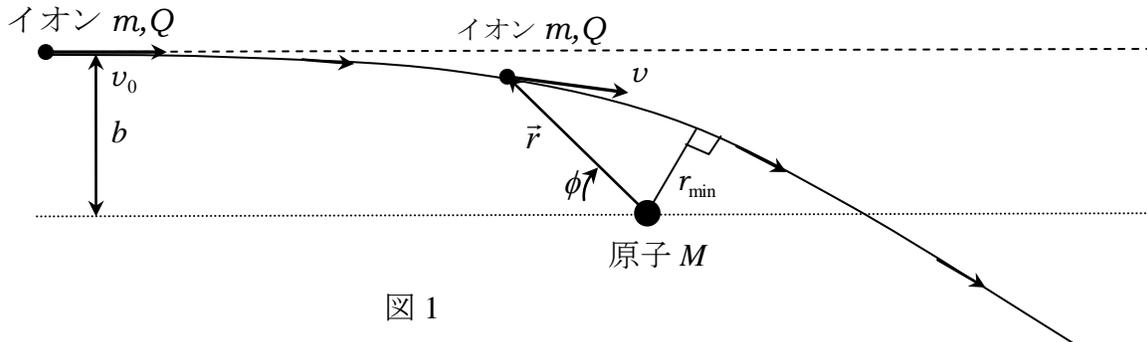


図1

質量  $m$ 、電荷  $Q$  のイオンが非相対論的な初速度  $v_0$  で十分に離れた位置から、質量  $M$  ( $\gg m$ )、分極率  $a$  の中性原子に向かって運動する。また、図1のように、衝突パラメータを  $b$  とする。

原子は、接近するイオンによって作られる電場  $\vec{E}$  によって瞬時に分極する。その結果、原子の電気双極子モーメントは、 $\vec{p} = a\vec{E}$  と与えられる。この問題では、放射による損失は無視せよ

3.1 図2において、原点  $O$  にある電気双極子  $\vec{p}$  から  $\vec{p}$  方向に距離  $r$  離れた点での電場の強さ  $\vec{E}_p$  を計算せよ。 [1.2点]

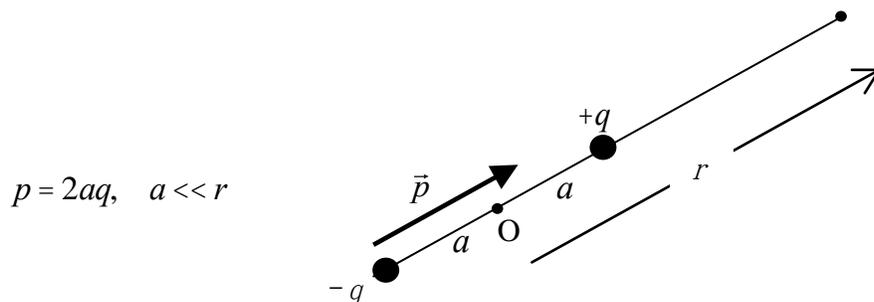


図2



3.2 偏極した原子がイオンに作用する力  $\vec{f}$  を求めよ。この力がイオンの電荷の符号にかかわらず、力が引力であることを示せ。

[3.0 点]

3.3 イオン-原子の相互作用の電氣的なポテンシャルエネルギーを  $\alpha, Q, r$  を用いて表せ。

[0.9 点]

3.4 図1に示したように、イオンが原子にもっとも近くなる距離を  $r_{\min}$  とする。この距離  $r_{\min}$  を求めよ。

[2.4 点]

3.5 もし、衝突パラメーター  $b$  がしきい値  $b_0$  (異なる結果となる境界の値を一般にしきい値という) に比べて十分に小さい場合、イオンは原子に向かってらせん状に引きつけられていく。この場合、イオンは中性になり、反対に原子は電荷を持つようになる。このような過程は“電荷交換”として知られている。このイオンと、原子の電荷交換の衝突による“電荷交換”の断面積  $A = pb_0^2$  は具体的にどのように表されるか。

[2.5 点]