

I. 解答

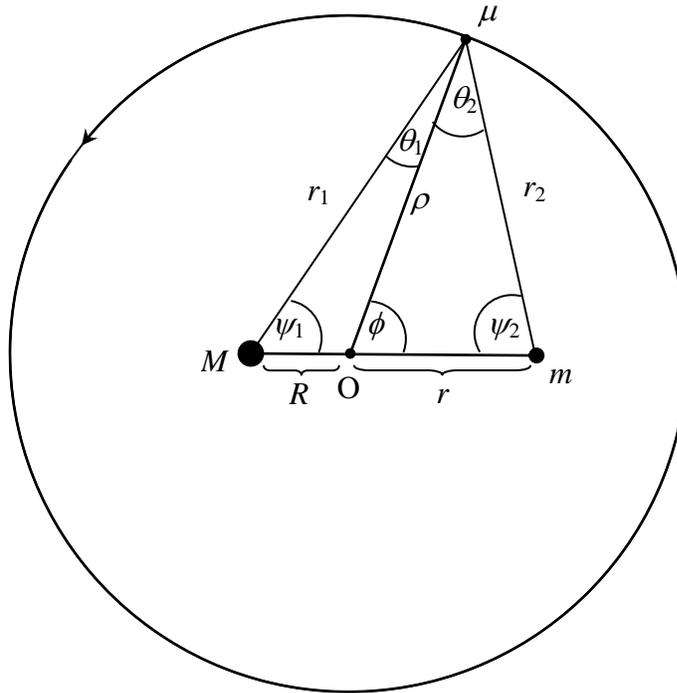


図 a

1.1 図 a で O は 2 質点の重心であるから,

$$M R = m r \quad \dots (1)$$

$$m \omega_0^2 r = \frac{G M m}{(R+r)^2} \quad \dots (2)$$

$$M \omega_0^2 R = \frac{G M m}{(R+r)^2}$$

式(2)から,  $\omega_0^2 = \frac{G(M+m)}{(R+r)^3} \quad \therefore \quad \omega_0 = \frac{1}{R+r} \sqrt{\frac{G(M+m)}{(R+r)}}$

したがって,  $\omega_0^2 = \frac{G(M+m)}{(R+r)^3} = \frac{GM}{r(R+r)^2} = \frac{Gm}{R(R+r)^2} \quad \dots (3)$

1.2  $\mu$  は  $M$  や  $m$  に比べ微小なので、質点  $M$  や  $m$  の運動に重力による影響を及ぼさない。  
 $\mu$  が  $M$  と  $m$  に対して相対的に静止するための条件として、次の 2 式が成立:

$$\frac{GM\mu}{r_1^2} \cos \theta_1 + \frac{Gm\mu}{r_2^2} \cos \theta_2 = \mu \omega^2 \rho = \frac{G(M+m)\mu}{(R+r)^3} \rho \quad \dots (4)$$

$$\frac{GM\mu}{r_1^2} \sin \theta_1 = \frac{Gm\mu}{r_2^2} \sin \theta_2 \quad \dots (5)$$

式(5)から得られる  $\frac{GM}{r_1^2}$  の値を式(4)に代入し、公式

$$\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 = \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

を用いると、

$$m \frac{\sin(\theta_1 + \theta_2)}{r_2^2} = \frac{(M+m)}{(R+r)^3} \rho \sin \theta_1 \quad \dots (6)$$

長さ  $r_2$ ,  $\rho$ , 角度  $\theta_1$  および  $\theta_2$  について正弦定理より、

$$\frac{\sin \psi_1}{\rho} = \frac{\sin \theta_1}{R} \quad \dots (7)$$

$$\frac{\sin \psi_1}{r_2} = \frac{\sin(\theta_1 + \theta_2)}{R+r}$$

式(7)を式(6)に代入し、

$$\frac{1}{r_2^3} = \frac{R}{(R+r)^4} \frac{(M+m)}{m} \quad \dots (8)$$

$\frac{m}{M+m} = \frac{R}{R+r}$  より、式(8)は、

$$r_2 = \underline{R+r} \quad \dots (9)$$

式(5)の  $\frac{Gm}{r_2^2}$  を式(4)に代入し、同様にして、

$$r_1 = \underline{R+r} \quad \dots (10)$$

したがって、3 質点  $M, m, \mu$  は正三角形をなし、

$$\psi_1 = 60^\circ \quad \dots (11)$$

$$\psi_2 = 60^\circ$$

$\rho$  は余弦定理より、

$$\rho^2 = r^2 + (R+r)^2 - 2r(R+r) \cos 60^\circ$$

$$\rho = \underline{\sqrt{r^2 + rR + R^2}} \quad \dots (12)$$

**1.2 の別解**

式(5)をたてた後、正弦定理から、

$$\frac{r_1}{\sin(180^\circ - \phi)} = \frac{R}{\sin \theta_1}$$

$$\frac{r_2}{\sin \phi} = \frac{r}{\sin \theta_2}$$

これらより、

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{R}{r} \times \frac{r_2}{r_1} = \frac{m}{M} \times \frac{r_2}{r_1} \quad \dots (a)$$

式(5), (a)から、

$$r_1 = r_2 \quad \dots (b)$$

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{m}{M} \quad \dots (c)$$

$$\psi_1 = \psi_2 \quad \dots (d)$$

すると式(4)は次のようにかける:

$$M \cos \theta_1 + m \cos \theta_2 = \frac{(M+m)}{(R+r)^3} r_1^2 \rho \quad \dots (e)$$

式(c), (e)から、

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \frac{M+m}{M} \frac{r_1^2 \rho}{(R+r)^3} \sin \theta_2 \quad \dots (f)$$

また、正弦定理を用いて、

$$\frac{\rho}{\sin \psi_2} = \frac{r}{\sin \theta_2} \quad \dots (g)$$

式(f), (g)から、

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \frac{M+m}{M} \frac{r_1^2 r}{(R+r)^3} \sin \psi_2 \quad \dots (h)$$

余弦定理より、 $(R+r)^2 = r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + r_1^2 = 2r_1^2 [1 - \cos(\theta_1 + \theta_2)]$   $\dots (i)$

式(h), (i)から、

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\sin \psi_2}{2[1 - \cos(\theta_1 + \theta_2)]} \quad \dots (j)$$

さらに、図から、

$$\theta_1 + \theta_2 = 180^\circ - \psi_1 - \psi_2 = 180^\circ - 2\psi_2$$

$$\therefore \cos \psi_2 = \frac{1}{2}, \psi_2 = 60^\circ, \psi_1 = 60^\circ$$

$M$  と  $m$  は一辺の長さが  $(R+r)$  の正三角形の辺であるから、 $\mu$  と  $M$  の距離、 $\mu$  と  $m$  の距離はともに、

$$\mu \text{ と } O \text{ の距離は、 } \rho = \sqrt{\left(\frac{R+r}{2} - R\right)^2 + \left\{(R+r)\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}^2} = \sqrt{R^2 + Rr + r^2}$$

1.3 質点  $\mu$  のもつ全力学的エネルギー  $E$  は,

$$E = -\frac{GM\mu}{r_1} - \frac{Gm\mu}{r_2} + \frac{1}{2}\mu\left(\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2\omega^2\right) \quad \dots (13)$$

$\mu$  の位置の微小変化は回転中心から半径方向に起き、角運動量も保存されるので、  
 $r_1 = r_2 = \mathfrak{R}, m = M$  とおくと,

$$E = -\frac{2GM\mu}{\mathfrak{R}} + \frac{1}{2}\mu\left(\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \frac{\rho_0^4\omega_0^2}{\rho^2}\right) \quad \dots (14)$$

このエネルギーが保存するので、

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2GM\mu}{\mathfrak{R}^2} \frac{d\mathfrak{R}}{dt} + \mu \frac{d\rho}{dt} \frac{d^2\rho}{dt^2} - \mu \frac{\rho_0^4\omega_0^2}{\rho^3} \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad \dots (15)$$

ここで、

$$\frac{d\mathfrak{R}}{dt} = \frac{\mathfrak{R}}{\rho l} \frac{d\rho}{dt} = \frac{\rho l}{\mathfrak{R}} \frac{d\rho}{dt} \quad \dots (16)$$

を用いて、

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2GM\mu}{\mathfrak{R}^3} \rho \frac{d\rho}{dt} + \mu \frac{d\rho}{dt} \frac{d^2\rho}{dt^2} - \mu \frac{\rho_0^4\omega_0^2}{\rho^3} \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad \dots (17)$$

$\frac{d\rho}{dt} \neq 0$  であることから、

$$\frac{2GM}{\mathfrak{R}^3} \rho + \frac{d^2\rho}{dt^2} - \frac{\rho_0^4\omega_0^2}{\rho^3} = 0 \quad \therefore \quad \frac{d^2\rho}{dt^2} = -\frac{2GM}{\mathfrak{R}^3} \rho + \frac{\rho_0^4\omega_0^2}{\rho^3} \quad \dots (18)$$

を得る。

初期状態  $\mathfrak{R}_0, \rho_0$  から微小変位して、 $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_0 \left(1 + \frac{\Delta\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}_0}\right), \rho = \rho_0 \left(1 + \frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right)$  となったとき、

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(\rho_0 + \Delta\rho) = -\frac{2GM}{\mathfrak{R}_0^3 \left(1 + \frac{\Delta\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}_0}\right)^3} \rho_0 \left(1 + \frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right) + \frac{\rho_0^4\omega_0^2}{\rho_0^3 \left(1 + \frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right)^3} \quad \dots (19)$$

1 次の近似式  $(1+\varepsilon)^n \approx 1+n\varepsilon$  を用いることで、

$$\frac{d^2\Delta\rho}{dt^2} = -\frac{2GM}{\mathfrak{R}_0^3} \rho_0 \left(1 + \frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right) \left(1 - \frac{3\Delta\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}_0}\right) + \rho_0\omega_0^2 \left(1 - \frac{3\Delta\rho}{\rho_0}\right) \quad \dots (20)$$

$\Delta\rho = \frac{\mathfrak{R}}{\rho} \Delta\mathfrak{R}$  を用いて、

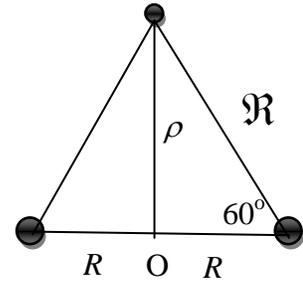


図 b

$$\frac{d^2\Delta\rho}{dt^2} = -\frac{2GM}{\mathfrak{R}_0^3}\rho_0\left(1 + \frac{\Delta\rho}{\rho_0} - \frac{3\rho_0\Delta\rho}{\mathfrak{R}_0^2}\right) + \rho_0\omega_0^2\left(1 - \frac{3\Delta\rho}{\rho_0}\right) \quad \dots(21)$$

$$\omega_0^2 = \frac{2GM}{\mathfrak{R}_0^3} \text{ から,}$$

$$\frac{d^2\Delta\rho}{dt^2} = -\omega_0^2\rho_0\left(1 + \frac{\Delta\rho}{\rho_0} - \frac{3\rho_0\Delta\rho}{\mathfrak{R}_0^2}\right) + \omega_0^2\rho_0\left(1 - \frac{3\Delta\rho}{\rho_0}\right) \quad \dots(22)$$

$$\frac{d^2\Delta\rho}{dt^2} = -\omega_0^2\rho_0\left(\frac{4\Delta\rho}{\rho_0} - \frac{3\rho_0\Delta\rho}{\mathfrak{R}_0^2}\right) \quad \dots(23)$$

$$\frac{d^2\Delta\rho}{dt^2} = -\omega_0^2\Delta\rho\left(4 - \frac{3\rho_0^2}{\mathfrak{R}_0^2}\right) \quad \dots(24)$$

図 b より  $\rho_0 = \mathfrak{R}_0 \cos 30^\circ$ ,  $\frac{\rho_0^2}{\mathfrak{R}_0^2} = \frac{3}{4}$  が成立し,

$$\frac{d^2\Delta\rho}{dt^2} = -\omega_0^2\Delta\rho\left(4 - \frac{9}{4}\right) = -\frac{7}{4}\omega_0^2\Delta\rho \quad \dots(25)$$

振動の角振動数は,  $\frac{\sqrt{7}}{2}\omega_0$ .

### 1.3 の別解

$$M = m \text{ より, } R = r, \quad \omega_0^2 = \frac{G(M+M)}{(R+R)^3} = \frac{GM}{4R^3}$$

摂動が無いときの回転の半径  $\rho$  は  $\sqrt{3}R$  なので, 摂動を考えるとときの半径は  $\zeta \ll \sqrt{3}R$  として,  $\sqrt{3}R + \zeta$  と表せる。  $\mu$  の運動方程式は,

$$-\frac{2GM\mu}{\{R^2 + (\sqrt{3}R + \zeta)^2\}^{3/2}}(\sqrt{3}R + \zeta) \Rightarrow \mu \frac{d^2}{dt^2} \sqrt{(R+\zeta)^2 - \mu\omega^2} \sqrt{R\zeta} \quad \dots (k)$$

$$\text{角運動量が保存することから, } \mu\omega_0(\sqrt{3}R)^2 = \mu\omega(\sqrt{3}R + \zeta)^2 \quad \dots (l)$$

式(k)と(l)より, 近似  $\zeta^2 \approx 0$  と 1 次の近似式を用いることで,

$$-\frac{2GM}{\{R^2 + (\sqrt{3}R + \zeta)^2\}^{3/2}}(\sqrt{3}R + \zeta) = \frac{d^2\zeta}{dt^2} - \frac{\omega_0^2\sqrt{3}R}{(1 + \zeta/\sqrt{3}R)^3}$$

$$-\frac{2GM}{\{4R^2 + 2\sqrt{3}\zeta R\}^{3/2}}(\sqrt{3}R + \zeta) \approx \frac{d^2\zeta}{dt^2} - \frac{\omega_0^2\sqrt{3}R}{(1 + \zeta/\sqrt{3}R)^3}$$

$$-\frac{GM}{4R^3}\sqrt{3}R \frac{(1 + \zeta/\sqrt{3}R)}{(1 + \sqrt{3}\zeta/2R)^{3/2}} = \frac{d^2\zeta}{dt^2} - \frac{\omega_0^2\sqrt{3}R}{(1 + \zeta/\sqrt{3}R)^3}$$

$$-\omega_0^2 \sqrt{3} R \left(1 - \frac{3\sqrt{3}\zeta}{4R}\right) \left(1 + \frac{\zeta}{\sqrt{3}R}\right) \approx \frac{d^2\zeta}{dt^2} - \omega_0^2 \sqrt{3} R \left(1 - \frac{3\zeta}{\sqrt{3}R}\right)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \zeta = -\left(\frac{7}{4}\omega_0^2\right)\zeta$$

1.4  $v$  を静止座標系からみた, それぞれの宇宙船が中心  $O$  のまわりを円運動する速さとする。また, 宇宙船間の相対速度を下付きの添え字で表す(例えば,  $v_{BA}$  で  $A$  に対する  $B$  の相対速度を表す)。

円運動の周期は 1 年であるから,  $T = 365 \times 24 \times 60 \times 60 \text{ s}$  ... (26)

また角速度は,  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  で表される。

宇宙船の速さは,  $v = \omega \frac{L}{2 \cos 30^\circ} = 575 \text{ m/s}$  ... (27)

これは光速よりずっと遅いので, 非相対論的に取り扱って良い。

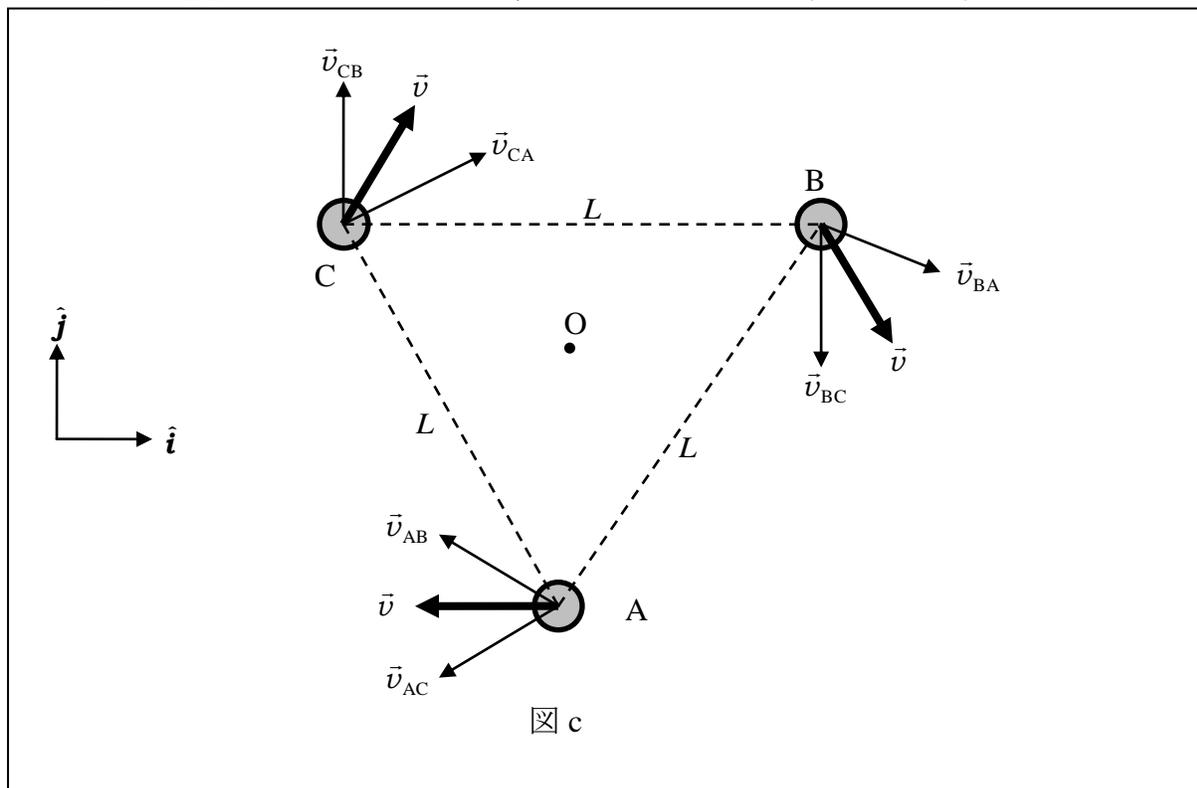


図 c の直交座標系で,  $B$  と  $C$  の速度は, それぞれ,

$$\vec{v}_B = v \cos 60^\circ \hat{i} - v \sin 60^\circ \hat{j}, \quad \vec{v}_C = v \cos 60^\circ \hat{i} + v \sin 60^\circ \hat{j}$$

したがって,  $\vec{v}_{BC} = -2v \sin 60^\circ \hat{j} = -\sqrt{3}v \hat{j}$

C に対する B の相対速度の大きさは,  $\sqrt{3}v \approx \underline{996\text{m/s}}$  ... (28)

任意の 2 個の宇宙船について, それぞれのもう一方からみた相対速度は同じ大きさ逆向きになっている。

#### 1.4 の別解

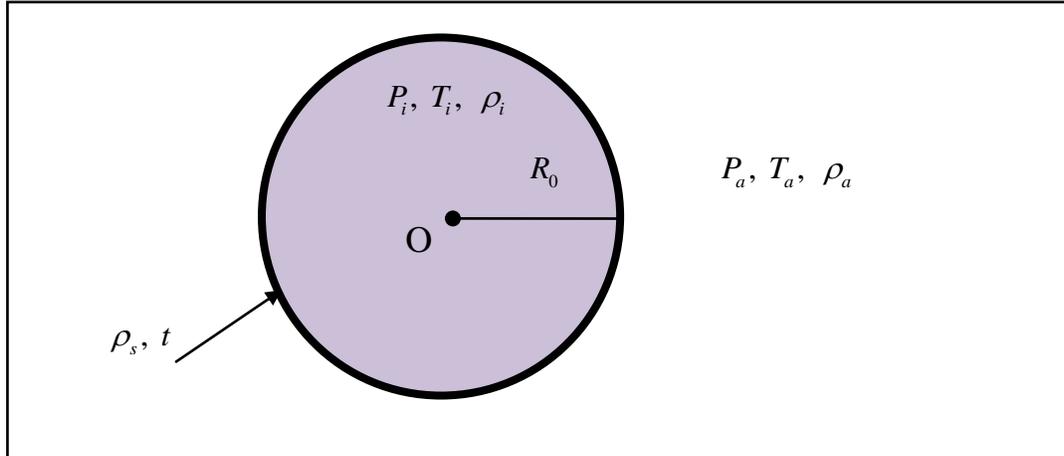
宇宙船の 1 つを回転の中心として考えると,

$$v_{BC} = \omega L = \frac{2\pi}{365 \times 24 \times 60 \times 60\text{s}} (5 \times 10^6 \text{ km}) \approx 996\text{m/s}$$



## 2. 解答

### 2.1 空気に囲まれたシャボン玉



球を半分に切り，射影領域での力のつり合いを考えると，

$$P_i \pi R_0^2 = P_a \pi R_0^2 + 2(2\pi R_0 \gamma) \quad \dots(1)$$

$$P_i = P_a + \frac{4\gamma}{R_0}$$

圧力と密度の関係は理想気体の状態方程式から導かれる：

$$PV = nRT \quad \therefore \quad P = \frac{\rho RT}{M} \quad (M \text{ は空気の分子量}) \quad \dots(2)$$

この式をシャボン玉の内側と外側に適用すると，

$$\rho_i T_i = P_i \frac{M}{R}$$

$$\rho_a T_a = P_a \frac{M}{R},$$

$$\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} = \frac{P_i}{P_a} = \left[ 1 + \frac{4\gamma}{R_0 P_a} \right] \quad \dots(3)$$

2.2  $\gamma=0.025\text{ Nm}^{-1}$ ,  $R_0=1.0\text{ cm}$ ,  $P_a=1.013\times 10^5\text{ Nm}^{-2}$ を使うとこの比の値は,

$$\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} = 1 + \frac{4\gamma}{R_0 P_a} = 1 + 0.0001 \quad \dots(4)$$

(表面張力による影響は非常に小さい。)

2.3  $W$ をシャボン玉の全質量,  $B$ をシャボン玉の周りの空気による浮力とおくと,

$$\begin{aligned} W &= (\text{シャボン玉の膜と内部空気の質量})g \\ &= \left( 4\pi R_0^2 \rho_s t + \frac{4}{3} \pi R_0^3 \rho_i \right) g \\ &= 4\pi R_0^2 \rho_s t g + \frac{4}{3} \pi R_0^3 \frac{\rho_a T_a}{T_i} \left[ 1 + \frac{4\gamma}{R_0 P_a} \right] g \end{aligned} \quad \dots(5)$$

シャボン玉の周りの空気による浮力は,

$$B = \frac{4}{3} \pi R_0^3 \rho_a g \quad \dots(6)$$

シャボン玉が静止した大気中で浮くとき,

$$\begin{aligned} B &\geq W \\ \frac{4}{3} \pi R_0^3 \rho_a g &\geq 4\pi R_0^2 \rho_s t g + \frac{4}{3} \pi R_0^3 \frac{\rho_a T_a}{T_i} \left[ 1 + \frac{4\gamma}{R_0 P_a} \right] g \end{aligned} \quad \dots(7)$$

整理して,

$$\begin{aligned} T_i &\geq \frac{R_0 \rho_a T_a}{R_0 \rho_a - 3 \rho_s t} \left[ 1 + \frac{4\gamma}{R_0 P_a} \right] \\ &\geq 307.1\text{ K} \end{aligned} \quad \dots(8)$$

内部の空気は約 $7.1^\circ\text{C}$ 温かくなければならない。

2.4 半径の変化は無視 $\rightarrow$ 半径は $R_0=1.0\text{ cm}$ のまま

(実際は温度が $307.1\text{ K}$ から $300\text{ K}$ に下がったとき, 半径は $0.8\%$ 小さくなる。石鹼膜自体も少し薄くなる。)

ストークスの法則によると, 空気抵抗力は,

$$F = 6\pi\eta R_0 u \quad \dots(9)$$

と表される。

シャボン玉が上昇気流の中で浮くとすると,

$$\begin{aligned} F &\geq W - B \\ 6\pi\eta R_0 u &\geq \left( 4\pi R_0^2 \rho_s t + \frac{4}{3} \pi R_0^3 \rho_i \right) g - \frac{4}{3} \pi R_0^3 \rho_a g \end{aligned} \quad \dots(10)$$

シャボン玉が熱平衡状態  $T_i = T_a$  にあるとき,

$$6\pi\eta R_0 u \geq \left( 4\pi R_0^2 \rho_s t + \frac{4}{3} \pi R_0^3 \rho_a \left[ 1 + \frac{4\gamma}{R_0 P_a} \right] \right) g - \frac{4}{3} \pi R_0^3 \rho_a g$$

整理して,

$$u \geq \frac{4R_0 \rho_s t g}{6\eta} + \frac{\frac{4}{3} R_0^2 \rho_a g \left( \frac{4\gamma}{R_0 P_a} \right)}{6\eta} \quad \dots(11)$$

2.5 数値は  $u \geq 0.36 \text{ m/s}$

第2項は第1項よりも3桁ほど小さい

以下では表面張力の項を無視する

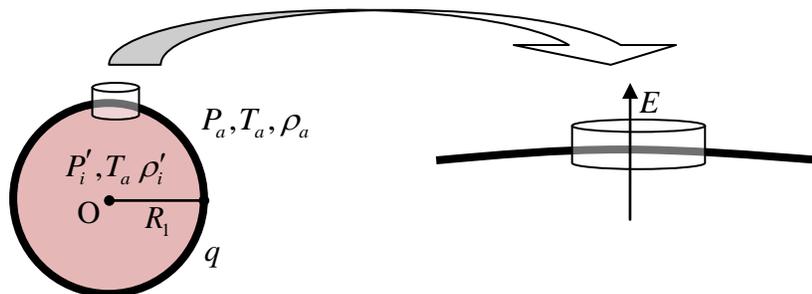
2.6 シャボン玉が帯電したとき, 電気的な斥力によりシャボン玉は膨張し, それにより浮力が大きくなる。

斥力/面積は, 表面の電場×電荷/面積と表せる。

石鹸膜の表面の電場を計算するには2つの方法がある。

#### A. ガウスの法則による方法

石鹸膜表面に非常に薄い小さな箱を考える。



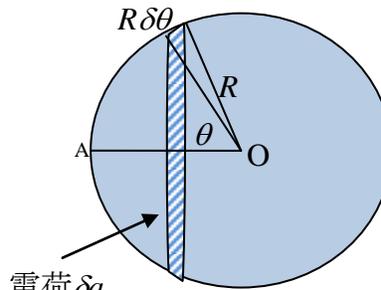
$E$  は膜上の他の部分 (箱の中自身を除く) によって作られる電場である。

$$\begin{aligned} E_q &= \text{箱のちょうど外側の電場} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \\ &= E + \text{表面の電荷 } \sigma \text{ による電場} \\ &= E + E_\sigma \end{aligned}$$

ガウスの法則から  $E_\sigma = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$  で, 対称性からこれは膜に垂直である。

よって, 
$$E = E_q - E_\sigma = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{q}{4\pi R_1^2} \quad \dots(12)$$

**B. 積分を直接用いる方法**



$$\delta q = \left( \frac{q}{4\pi R^2} \right) 2\pi R \sin \theta \cdot R \delta \theta$$

電気的な斥力の大きさを知るためには表面上の (外側ではない) の点での電場  $E$  の強さをまず求める必要がある。

点 A 上での電場の  $\overrightarrow{OA}$  成分は,

$$\delta E_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(q/4\pi R_1^2) 2\pi R_1^2 \sin \theta \delta \theta}{\left( 2R_1 \sin \frac{\theta}{2} \right)^2} \sin \frac{\theta}{2} = \frac{(q/4\pi R_1^2)}{2\epsilon_0} \cos \frac{\theta}{2} \delta \left( \frac{\theta}{2} \right)$$

$$E_A = \frac{(q/4\pi R_1^2)}{2\epsilon_0} \int_{\theta=0}^{\theta=180^\circ} \cos \frac{\theta}{2} d \left( \frac{\theta}{2} \right) = \frac{(q/4\pi R_1^2)}{2\epsilon_0} \quad \dots(13)$$

シャボン玉の表面での単位面積あたりの斥力は,

$$\left(\frac{q}{4\pi R_1^2}\right)E = \frac{(q/4\pi R_1^2)^2}{2\epsilon_0} \quad \dots(14)$$

シャボン玉が帯電した時の変化後の圧力と密度を  $P'_i$ ,  $\rho'_i$  とおく。

この電気的な斥力は気体の圧力  $P'_i$  を変化させる。

理想気体の法則から  $P'_i$  と  $P_i$  は次の関係を満たす。

$$P'_i \frac{4}{3}\pi R_1^3 = P_i \frac{4}{3}\pi R_0^3$$

$$P'_i = \left(\frac{R_0}{R_1}\right)^3 P_i = \left(\frac{R_0}{R_1}\right)^3 P_a \quad \dots(15)$$

最後の式では表面張力の項を無視した。

半球を射影した領域での力のつり合いから次のようになる。(ここでも表面張力の項は無視する。)

$$P'_i + \frac{(q/4\pi R_1^2)^2}{2\epsilon_0} = P_a \quad \dots(16)$$

$$P_a \left(\frac{R_0}{R_1}\right)^3 + \frac{(q/4\pi R_1^2)^2}{2\epsilon_0} = P_a$$

整理して,

$$\left(\frac{R_1}{R_0}\right)^4 - \left(\frac{R_1}{R_0}\right) - \frac{q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 R_0^4 P_a} = 0 \quad \dots(17)$$

(17) 式から  $q=0$  の時に期待通り  $\frac{R_1}{R_0}=1$  となることに注意する。

2.7  $\frac{q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 R_0^4 P_a} \ll 1$  より,  $R_1$  について近似計算を行う。

$R_1 = R_0 + \Delta R$ ,  $\Delta R \ll R_0$  とする。ゆえに,

$$\frac{R_1}{R_0} = 1 + \frac{\Delta R}{R_0}, \quad \left(\frac{R_1}{R_0}\right)^4 \approx 1 + 4\frac{\Delta R}{R_0} \quad \dots(18)$$

(17)式から,

$$\Delta R \approx \frac{q^2}{96\pi^2 \epsilon_0 R_0^3 P_a} \quad \dots(19)$$

$$R_1 \approx R_0 + \frac{q^2}{96\pi^2 \varepsilon_0 R_0^3 P_a} \approx R_0 \left( 1 + \frac{q^2}{96\pi^2 \varepsilon_0 R_0^4 P_a} \right) \quad \dots(20)$$

2.8 シャボン玉が浮く条件は,

$$B \geq W$$

$$\frac{4}{3} \pi R_1^3 \rho_a g \geq 4\pi R_0^2 \rho_s t g + \frac{4}{3} \pi R_0^3 \rho_i g \quad \dots(21)$$

$\gamma \rightarrow 0$ ,  $T_i = T_a$  から  $\rho_i = \rho_a$  である。これと,  $R_1 = R_0 \left( 1 + \frac{\Delta R}{R_0} \right)$  を代入して,

$$\frac{4}{3} \pi R_0^3 \left( 1 + \frac{\Delta R}{R_0} \right)^3 \rho_a g \geq 4\pi R_0^2 \rho_s t g + \frac{4}{3} \pi R_0^3 \rho_a g$$

$$\frac{4}{3} \pi (3\Delta R) \rho_a g \geq 4\pi R_0^2 \rho_s t g$$

$$\frac{4}{3} \pi \frac{3q^2}{96\pi^2 \varepsilon_0 R_0 P_a} \rho_a g \geq 4\pi R_0^2 \rho_s t g$$

$$q^2 \geq \frac{96\pi^2 R_0^3 \rho_s t \varepsilon_0 P_a}{\rho_a} \quad \dots(22)$$

$$q \approx 256 \times 10^{-9} \text{ C} \approx 256 \text{ nC}$$

ちなみに表面張力の項も考えると,

$$R_1 \approx \left( 1 + \frac{q^2 / 96\pi^2 \varepsilon_0 R_0^4 P_a}{\left[ 1 + \frac{2}{3} \left( \frac{4\gamma}{R_0 P_a} \right) \right]} \right) R_0$$

**問題 3: 解答**

1. クーロンの定理を用いると,  $r$  だけ離れた場所に生じる電場は以下のように書ける。

$$\begin{aligned}
 E_p &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0(r-a)^2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0(r+a)^2} \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left( \frac{1}{\left(1-\frac{a}{r}\right)^2} - \frac{1}{\left(1+\frac{a}{r}\right)^2} \right) \quad \dots(1)
 \end{aligned}$$

$a$  は  $r$  に比べて微小であり, 近似すると,

$$\begin{aligned}
 E_p &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left( 1 + \frac{2a}{r} - 1 + \frac{2a}{r} \right) \\
 &= + \frac{4qa}{4\pi\epsilon_0 r^3} = + \frac{qa}{\pi\epsilon_0 r^3} \quad \dots(2) \\
 &= \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 r^3}
 \end{aligned}$$

2. イオンによって生じる, 中性原子の位置での電場は,

$$\vec{E}_{ion} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad \dots(3)$$

したがって, 生じる双極子モーメントは,

$$\vec{p} = \alpha \vec{E}_{ion} = -\frac{\alpha Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad \dots(4)$$

(2)式より,

$$\vec{E}_p = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \hat{r}$$

その瞬間にイオンの位置に生じる, 誘導された電場  $\vec{E}_p$  は, (4)式を用いて,

$$\vec{E}_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[ -\frac{2\alpha Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \right] = -\frac{\alpha Q}{8\pi^2 \epsilon_0^2 r^5} \hat{r}$$

これより, イオンに働く力は,

$$\vec{f} = \vec{Q}_p \vec{E} = -\frac{\alpha Q^2}{8\pi^2 \epsilon_0^2 r^5} \hat{r} \quad \dots(5)$$

負号は、この力が引力であることを示しており、 $Q^2$  から  $Q$  の符号にかかわらず、力が引力であることがわかる。

3. イオンのポテンシャルエネルギーは次のように与えられる。

$$U = \int_r^\infty \vec{f} \cdot d\vec{r} \quad \dots(6)$$

これを用いれば、

$$U = \int_r^\infty \vec{f} \cdot d\vec{r} = -\frac{\alpha Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0^2 r^4} \quad \dots(7)$$

4.  $r_{\min}$  の位置において、角運動量保存則より、

$$\begin{aligned} m v_{\max} r_{\min} &= m v_0 b \\ v_{\max} &= v_0 \frac{b}{r_{\min}} \end{aligned} \quad \dots(8)$$

エネルギー保存則より、

$$\frac{1}{2} m v_{\max}^2 + \frac{-\alpha Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0^2 r^4} = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad \dots(9)$$

(8), (9)式より、

$$\begin{aligned} \left(\frac{b}{r_{\min}}\right)^2 - \frac{\alpha Q^2 / \frac{1}{2} m v_0^2}{32\pi^2 \epsilon_0^2 b^4} \left(\frac{b}{r_{\min}}\right)^4 &= 1 \\ \left(\frac{r_{\min}}{b}\right)^4 - \left(\frac{r_{\min}}{b}\right)^2 + \frac{\alpha Q^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 m v_0^2 b^4} &= 0 \end{aligned} \quad \dots(10)$$

(10) 式の 2 次方程式を解き、 $\sqrt{\quad}$  をとれば、

$$r_{\min} = \frac{b}{\sqrt{2}} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{\alpha Q^2}{4\pi^2 \epsilon_0^2 m v_0^2 b^4}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \dots(11)$$

[この式は  $b$  が 0 でないかぎり  $r_{\min}$  は 0 でないことを示している]  
 $Q=0$  を代入すると、

$$r_{\min} = \frac{b}{\sqrt{2}} [1 \pm 1]^{\frac{1}{2}}$$

$r_{\min} = b$  となるために、+ を選ぶ必要があることがわかる。

したがって、

$$r_{\min} = \frac{b}{\sqrt{2}} \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{\alpha Q^2}{4\pi^2 \epsilon_0^2 m v_0^2 b^4}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \dots(12)$$

5. らせん軌道を描くのは(12)式が虚数となる場合である。  
 (この軌道において,  $r$  の最小値は存在しないため)  
 以下の条件において  $r_{\min}$  は実数である:

$$1 \geq \frac{\alpha Q^2}{4\pi^2 \epsilon_0^2 m v_0^2 b^4}$$

$$b \geq b_0 = \left( \frac{\alpha Q^2}{4\pi^2 \epsilon_0^2 m v_0^2} \right)^{\frac{1}{4}} \quad \dots(13)$$

よって, イオンが原子に衝突するための条件は,

$$b < b_0 = \left( \frac{\alpha Q^2}{4\pi^2 \epsilon_0^2 m v_0^2} \right)^{\frac{1}{4}}$$

したがって, 断面積  $A$  は,

$$A = \pi b_0^2 = \pi \left( \frac{\alpha Q^2}{4\pi^2 \epsilon_0^2 m v_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \dots(14)$$