実験問題１【解答】電気的ブラックボックス：容量変化による変位センサー

問 1　測定装置の特性決定

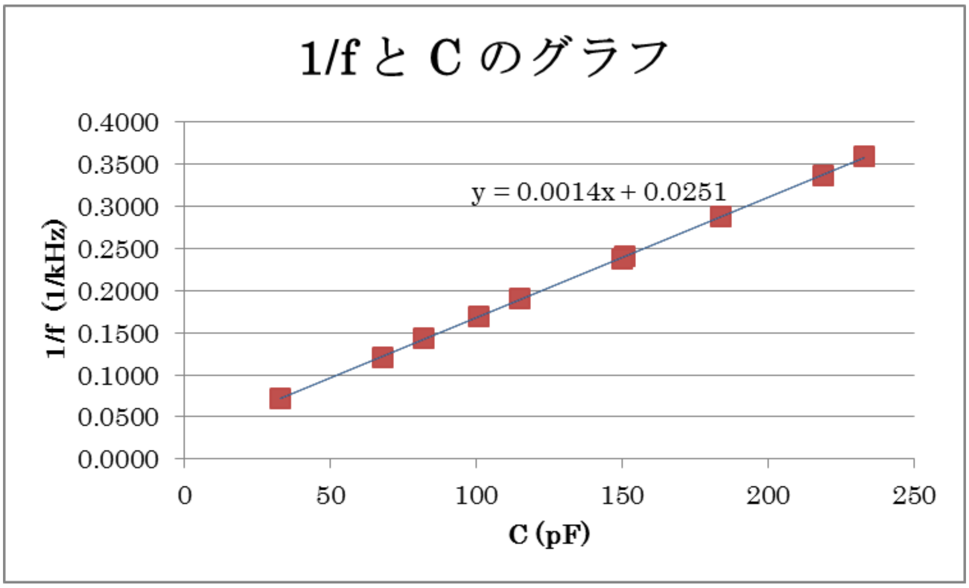
与えられた f と C の関係より，

$$f = \frac{\alpha}{C + C_s} \Leftrightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{\alpha}C + \frac{C_s}{\alpha}$$

すなわち，$\frac{1}{f}$ を縦軸（y 軸）にとり C を横軸（x 軸）にとったグラフは，理論上，傾きと y 切片がそれぞれ $1/\alpha$ と C_s/α であるような直線になる。

C の計測値(x 軸にプロットする)と，f の計測値，それに $\frac{1}{f}$ （y 軸にプロットする)を表にすると以下のようになった。

C (pF)	f (kHz)	1/f (ms)
33	13.94	0.0717
68	8.30	0.1205
82	6.99	0.1431
151	4.17	0.2398
233	2.79	0.3584
219	2.98	0.3356
184	3.48	0.2874
150	4.20	0.2381
115	5.24	0.1908
101	5.89	0.1698



このグラフより，傾き（$=1/\alpha$）と y 切片（$=C_s/\alpha$）はそれぞれ 0.0014 s/nF と 0.0251 ms である。

よって，

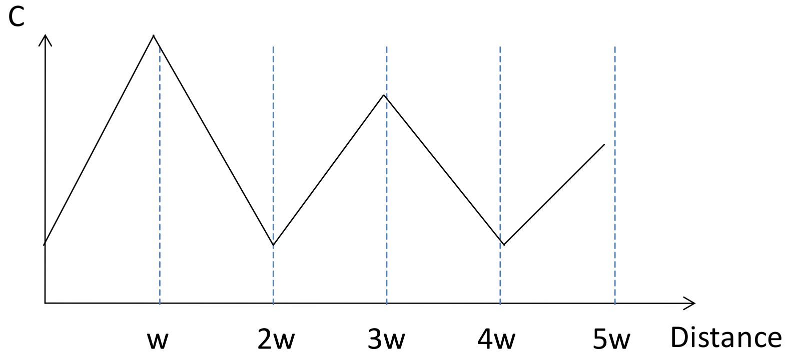
$$\alpha = \frac{1}{0.0014\ \mathrm{s/nF}} = 714\ \mathrm{nF/s}$$

$$C_s = \frac{y\,\text{切片}}{\text{傾き}} = \frac{0.0251\ \mathrm{ms}}{0.0014\ \mathrm{s/nF}} = 17.9\ \mathrm{pF}$$

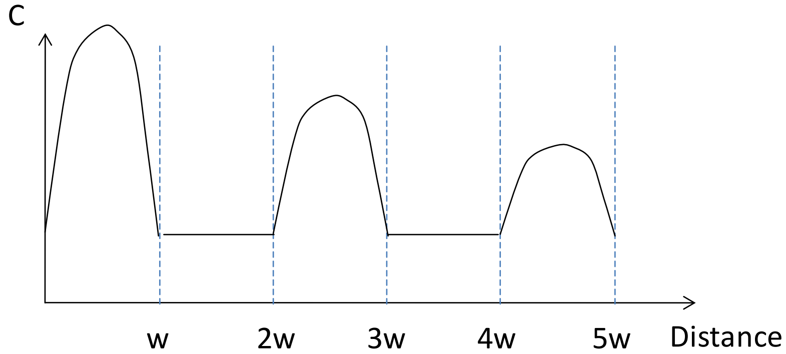
となる。

問２　平行板コンデンサーの幾何学的形状の決定

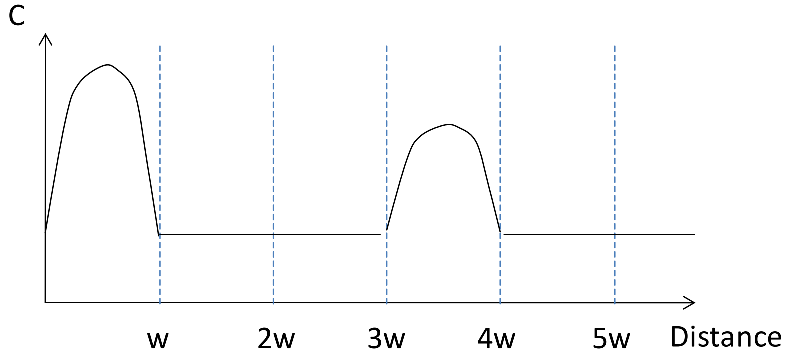
パターン I: 予想される位置と *C* のグラフ



パターン II: 予想される位置と *C* のグラフ

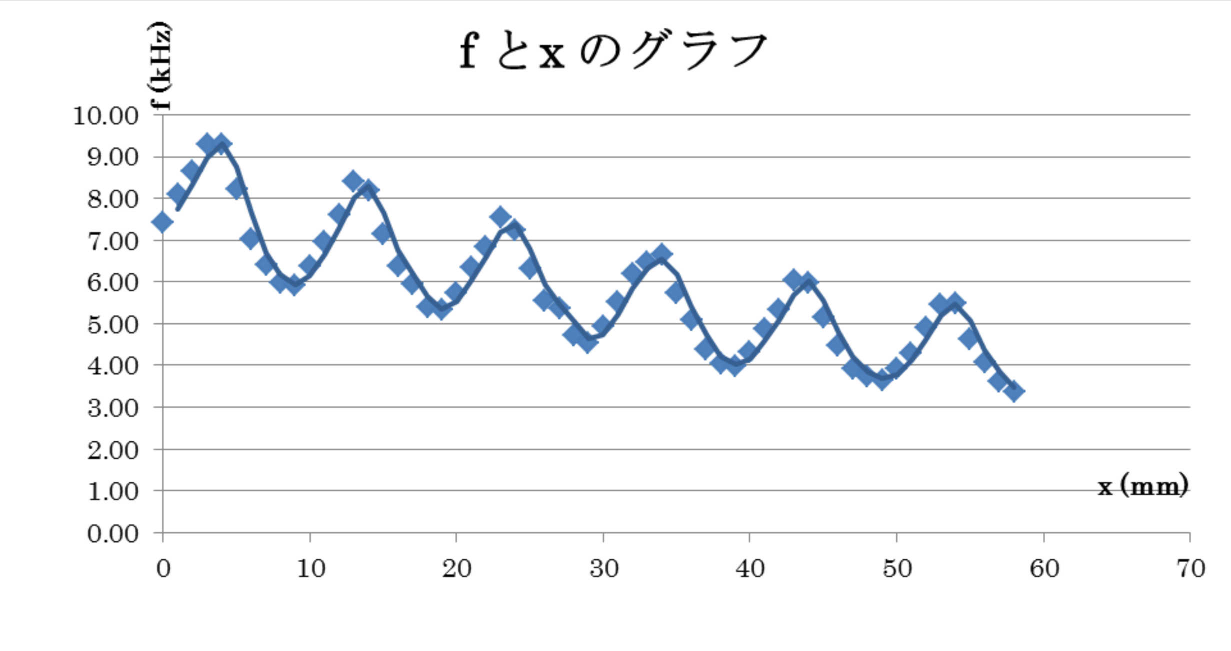


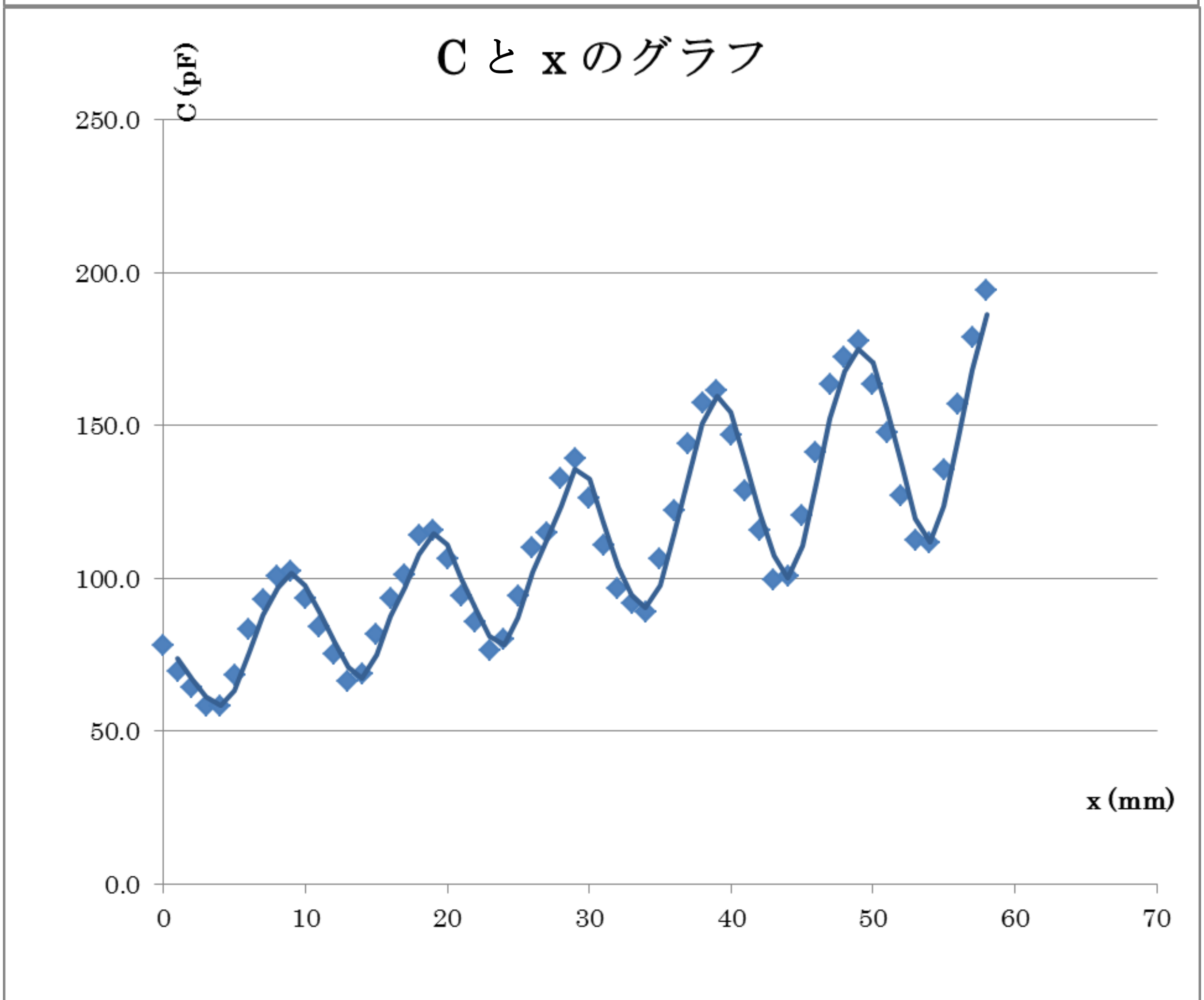
パターン III: 予想される位置と *C* のグラフ



x (板をずらした距離)に対する f と C の計測値のデータと，そのグラフは以下のようになった。

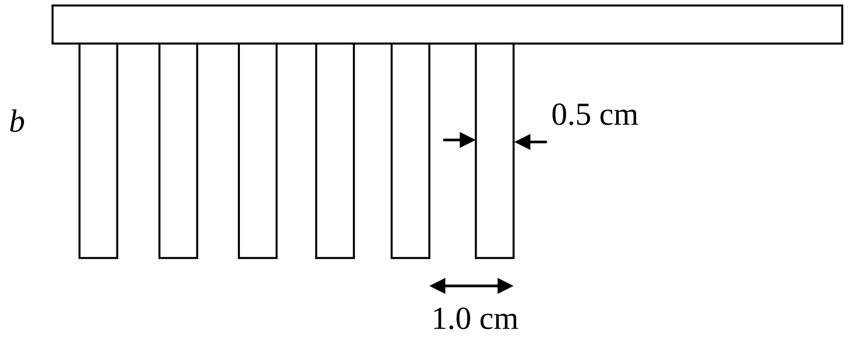
x (mm)	f (kHz)	C (pF)	x (mm)	f (kHz)	C (pF)
0	7.41	77.9	30	4.94	126.1
1	8.09	69.8	31	5.52	110.9
2	8.64	64.2	32	6.19	96.9
3	9.30	58.3	33	6.48	91.7
4	9.30	58.3	34	6.64	89.1
5	8.21	68.5	35	5.72	106.4
6	7.02	83.3	36	5.08	122.1
7	6.40	93.1	37	4.39	144.2
8	5.98	100.9	38	4.06	157.4
9	5.91	102.4	39	3.97	161.4
10	6.38	93.5	40	4.32	146.8
11	6.96	84.1	41	4.86	128.5
12	7.61	75.4	42	5.33	115.5
13	8.40	66.5	43	6.05	99.6
14	8.20	68.6	44	5.98	100.9
15	7.13	81.7	45	5.14	120.5
16	6.37	93.6	46	4.47	141.3
17	5.96	101.3	47	3.93	163.3
18	5.38	114.3	48	3.74	172.5
19	5.33	115.5	49	3.64	177.7
20	5.72	106.4	50	3.93	163.3
21	6.34	94.2	51	4.30	147.6
22	6.85	85.8	52	4.91	127.0
23	7.53	76.4	53	5.46	112.3
24	7.23	80.3	54	5.49	111.6
25	6.33	94.3	55	4.64	135.4
26	5.56	110.0	56	4.07	157.0
27	5.36	114.8	57	3.62	178.8
28	4.73	132.5	58	3.36	194.1
29	4.53	139.2			


f とxのグラフ
f (kHz)
10.00
9.00
8.00
7.00
6.00
5.00
4.00
3.00
2.00
1.00
0.00
x (mm)
0
10
20
30
40
50
60
70


C と x のグラフ
C (pF)
250.0
200.0
150.0
100.0
50.0
0.0
x (mm)
0
10
20
30
40
50
60
70

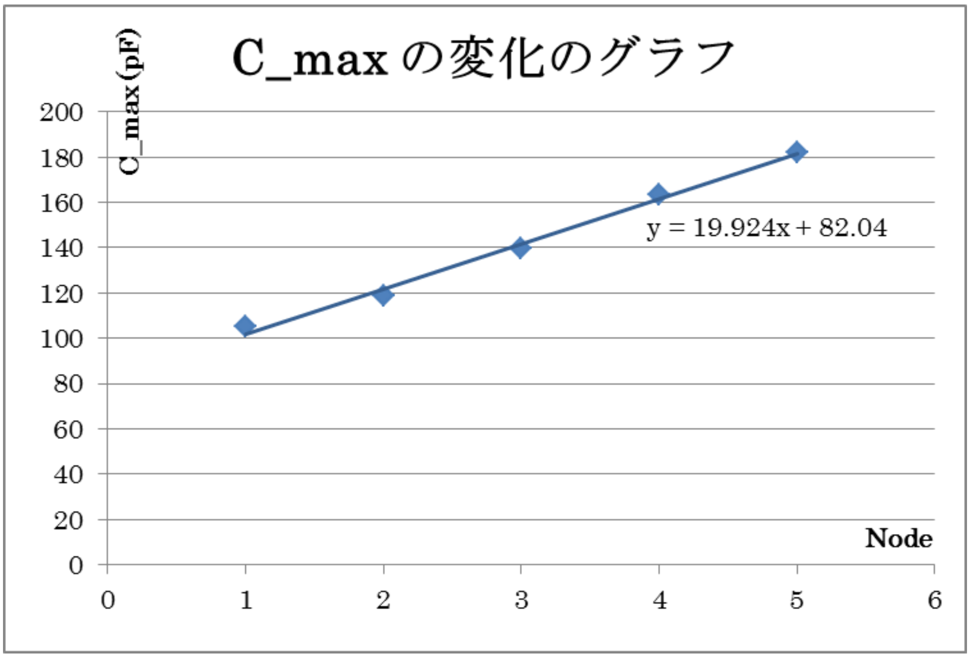
グラフの周期性より， 周期は 1.0 cm $\therefore$ $w = 5$ mm

あり得る単純な形状は，



C と x のグラフから C のピークの値を抜き出すと以下の表になる。C の極大値を y 軸, それが何番目の極大値かを示す番号(Node)を x 軸にプロットしてグラフにする。

Node	C_max
1	105.1
2	118.6
3	139.5
4	163.7
5	182.1



このグラフは，傾きが，

$$\Delta C = 19.9 \text{ pF/Node}$$

であるような直線である。

極板間の距離は，$d = 0.20$ mm，K = 1.5であり，

$$\Delta C \approx \frac{K\varepsilon_0 A}{d}$$

および，

$$A = 5\times 10^{-3}\mathrm{m}\times b$$

なので，

$$b \approx \frac{\Delta C d}{K\varepsilon_0 \times 5\times 10^{-3}\mathrm{m}} \approx 60\mathrm{mm}$$

ただし，両極板の間はK = 1.5である誘電体とした。

問３　デジタルマイクロメーターの分解能

与えられたfとCの関係

$$f = \frac{\alpha}{C+C_s}$$

より，

$$\Delta f \cong \left|\frac{df}{dC}\right|\Delta C = \left|\frac{-\alpha}{(C+C_s)^2}\right|\Delta C$$

$$= \frac{f^2}{\alpha}\Delta C$$

$$\Leftrightarrow \Delta C = \frac{\alpha}{f^2}\Delta f$$

また，Cがxに線形に依存しているところでは，

$$C = mx + \beta \to \Delta C = m\Delta x$$

よって，

$$\Delta x = \frac{\alpha}{mf^2}\Delta f$$

ここで，Δfはマルチメーターで検出できる最小のfの差異とし，x_0は$f = 5$ kHzとなるようなxの値，そしてmは$x = x_0$のときのCとxのグラフの傾きとする。

fとxのグラフより，$f = 5$ kHz のときの傾きmは以下に示す範囲から計算される。

fとxのグラフより，

$$m = 17.5\,\mathrm{pF/mm} = 1.75\times 10^{-8}\ \mathrm{F/m}$$

このmの値および，

$$f = 5\mathrm{kHz}, \alpha = 714\mathrm{pF/s}, \Delta f = 0.01\mathrm{kHz}$$

を用いて，

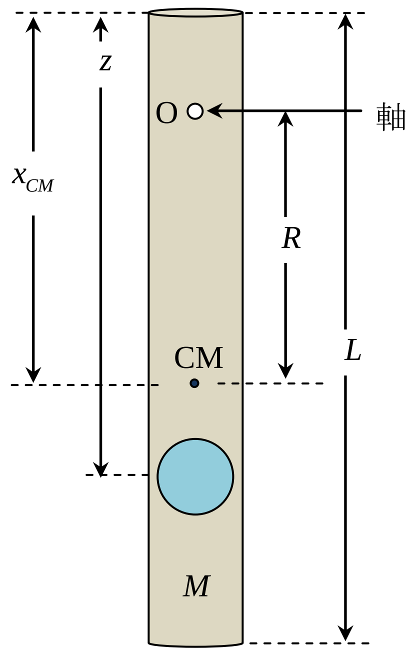
$$\Delta x = \frac{714\times 10^{-9}}{(1.75\times 10^{-8})(5\times 10^3)^2}\times(0.01\times 10^3) = 0.016\mathrm{mm}$$

注意: C と x のグラフの C (f ではない) が x に線形に関係している部分のみを用いる。

分解能を計算する方法の別解
(厳密ではない)

f と x のグラフと表の $f = 5$ kHz となっている付近を用い, f が 1 kHz 変化しているところを見つけたところ, x はほぼ 1.5 mm 変化していた。よって, f が 0.01kHz(検出できる最小の差異)だけ変化したときの x の変異は 0.015mm である。

実験問題２【解答】 力学的ブラックボックス: 中にボールが入った円筒



i，ii，iii で必要とされている値を計算するためには，次の２つがわからなければならない。

a. z, m, M によって決まる，円筒にボールを加えた系の質量中心の位置

b. そこでの慣性モーメント

CM (質量中心) の位置はつり合いをとることによって求められる。I_{CM} はボールを加えた円筒の振動の周期から計算できる。

グラフを描くためのパラメータを選択する解析手順

I.
$$x_{CM} = \frac{mz + M\dfrac{L}{2}}{m+M} \quad \cdots(1)$$

L は定規によってすぐに求められる。

x_{CM} は円筒と物体のつり合いの位置を見ることによって決定される。

II.　任意の点 O における振幅の小さい振動について，周期 T は次の式を考えることによって与えられる。

$$\left\{(M+m)R^2+I_{CM}\right\}\ddot{\theta}=-g(M+m)R\sin\theta\approx-g(M+m)R\theta \quad \cdots(2)$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{I_{CM}+(M+m)R^2}{g(M+m)R}} \quad \cdots(3)$$

ここで，

$$\begin{aligned} I_{CM} &= \frac{1}{3}M\left(\frac{L}{2}\right)^2+M\left(x_{CM}-\frac{L}{2}\right)^2+m\left(z-x_{CM}\right)^2 \\ &= \frac{1}{3}ML^2+Mx_{CM}^2-MLx_{CM}+m\left(z-x_{CM}\right)^2 \end{aligned} \quad \cdots (4)$$

また，(3)式より，

$$T^2\frac{g(M+m)}{4\pi^2}=\frac{I_{CM}}{R}+(M+m)R \quad \cdots(5)$$

方法(a) : 直線フィットによる方法

(5)式 は次の形にすることができる。

$$T^2R=\left(\frac{4\pi^2}{g}\right)R^2+\frac{4\pi^2I_{CM}}{(M+m)g} \quad \cdots(6)$$

さらに，T^2R と R^2 でプロットすることによって，

$$\text{傾き}\quad \alpha=\frac{4\pi^2}{g} \quad \cdots(7)$$

$$y\ \text{切片}\quad \beta=\frac{4\pi^2I_{CM}}{(M+m)g} \quad \cdots(8)$$

である直線のグラフを得ることができる。

したがって，
$$I_{CM} = \left(M+m\right)\frac{\beta}{\alpha} \quad \cdots(9)$$

g の値は (7) 式から，
$$g=\frac{4\pi^2}{\alpha} \quad \cdots (10)$$

方法 (b) : 曲線の最小点をとることによる方法

(5)式より，R が次の値のとき，T は最小値をとる。

$$R=R_{\min}\equiv\sqrt{\frac{I_{CM}}{M+m}} \quad \cdots (11)$$

R_{min} は T 対 R のグラフによって求められる。

また,
$$I_{CM} \;=\; \left(M+m\right)R_{\mathrm{m\ \ i}}^{2} \qquad \cdots (12)$$

(12)式と(1)式 から, z と $\dfrac{M}{m}$ を計算することができる。

$R = R_{\mathrm{min}}$ のとき, (5)式は,

$$T_{\mathrm{min}}^{2}\,\frac{g(M+m)}{4\pi^{2}} = (M+m)R_{\mathrm{min}} + (M+m)R_{\mathrm{min}}$$

となり,

$$g = \frac{2R_{\mathrm{min}}}{T_{\mathrm{min}}^{2}} \times 4\pi^{2} = \frac{8\pi^{2}R_{\mathrm{min}}}{T_{\mathrm{min}}^{2}} \qquad \cdots (13)$$

この式から g を計算することができる。

結果

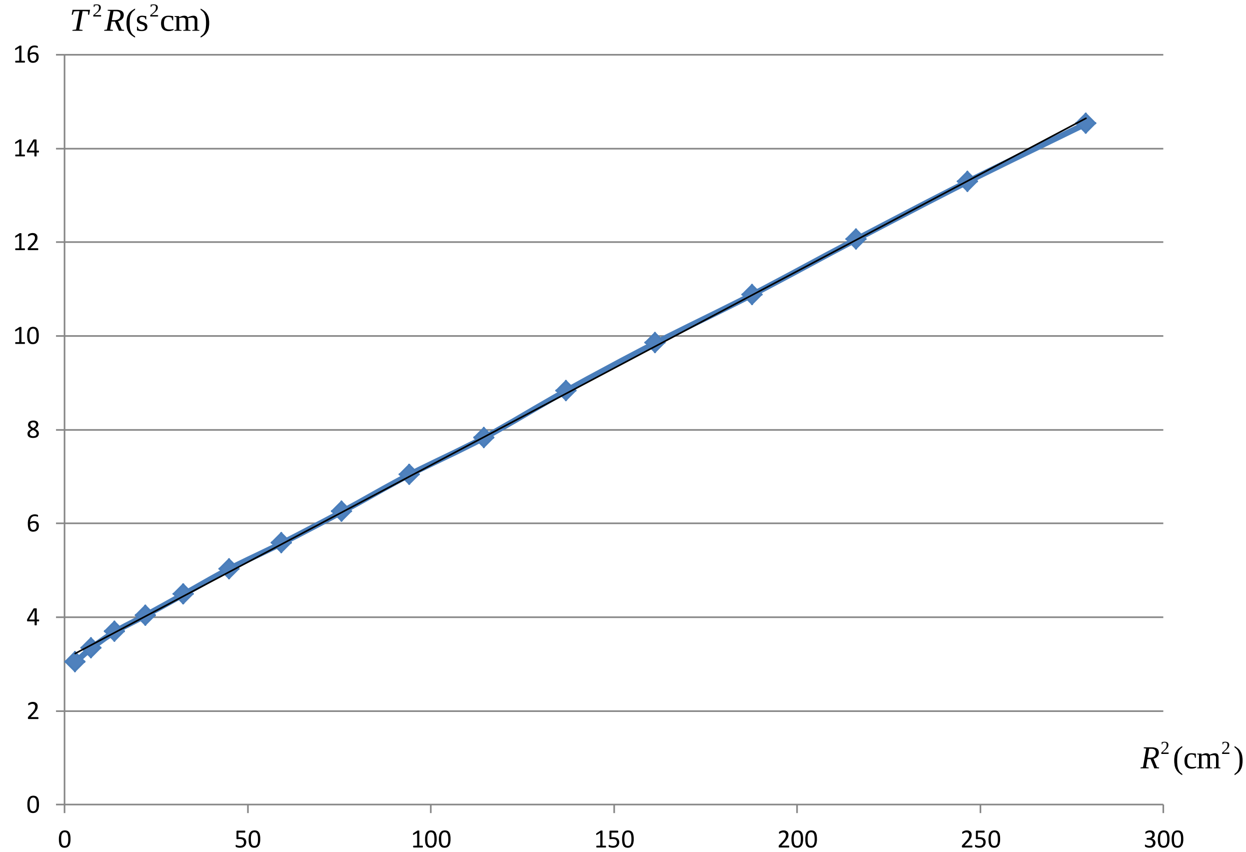
$$L = 30.0 \text{ cm} \pm 0.1 \text{ cm}$$

$$x_{CM} = 17.8 \text{ cm} \pm 0.1 \text{ cm} \text{ (一端から)}$$

$x_{CM} - R$ (cm)	20 周期 (s)			T (s)	R (cm)	R^2 (cm^2)	T^2R (s^2cm)
1.1	18.59	18.78	18.59	0.933	16.7	278.9	14.53
2.1	18.44	18.25	18.53	0.920	15.7	246.5	13.29
3.1	18.10	18.09	18.15	0.906	14.7	216.1	12.06
4.1	17.88	17.78	17.81	0.891	13.7	187.7	10.88
5.1	17.69	17.50	17.65	0.881	12.7	161.3	9.85
6.1	17.47	17.38	17.28	0.869	11.7	136.9	8.83
7.1	17.06	17.06	17.22	0.856	10.7	114.5	7.83
8.1	17.06	17.00	17.06	0.852	9.7	94.1	7.04
9.1	16.97	16.91	16.96	0.847	8.7	75.7	6.25
10.1	17.00	17.03	17.06	0.852	7.7	59.3	5.58
11.1	17.22	17.37	17.38	0.866	6.7	44.9	5.03
12.1	17.78	17.72	17.75	0.888	5.7	32.5	4.49
13.1	18.57	18.59	18.47	0.927	4.7	22.1	4.04
14.1	19.78	19.90	19.75	0.991	3.7	13.7	3.69
15.1	11.16	11.13	11.13	1.114	2.7	7.3	3.34
16.1	13.25	13.40	13.50	1.338	1.7	2.9	3.04

メモ:　$x_{CM} - R = 15.1$,　16.1 cm では, 10 周期分の時間をとった

方法(a)



直線グラフによる計算:　傾き　$\alpha = 0.04108 \pm 0.0007\ \mathrm{s^2/cm}$,　y 切片 $\beta = 3.10 \pm 0.05\,\mathrm{s^2cm}$

$$g = \frac{4\pi^2}{\alpha} \text{ より，} \qquad g = (961 \pm 20)\ \mathrm{cm/s^2}$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{3.10}{0.04108} = 75.46\ \mathrm{cm^2}\ \left(\pm 2.5\,\mathrm{cm^2}\right)$$

$$I_{CM} = (M+m)\frac{\beta}{\alpha} = (75.46)(M+m)$$

(4)式から,
$$I_{CM} = \frac{1}{3}M\left(\frac{L}{2}\right)^2 + M\left(x_{CM} - \frac{L}{2}\right)^2 + m\left(z - x_{CM}\right)^2$$

よって,
$$(75.46)(M+m) = 75.0M + 7.84M + m(z - 17.8)^2$$

$$-7\ .\ 3\frac{M}{m}8 + \quad 7\ 5\left(=.z4\ 6-\right)^2 \qquad \cdots (14)$$

質量中心の位置は，

$$17.8(M+m) = 15.0M + mz$$

$$\frac{M}{m} = \frac{z-17.8}{2.8} \qquad \cdots (15)$$

(14)，(15)式から，

$$-\frac{7.38}{2.8}(z-17.8)+75.46 = (z-17.8)^2$$

$$(z-17.8) = 7.47$$

$$z = 25.27 = 25.3 \pm 0.1 \text{ cm}$$

$$\frac{M}{m} = 2.68 = 2.7$$

誤差解析

g の誤差を求める。

(10)式から，
$$g = \frac{4\pi^2}{\alpha}$$

$$\Delta g = \frac{\Delta\alpha}{\alpha} g = 16.3 \text{cm/s}^2 \approx 20 \text{cm/s}^2$$

ｉ)　z の誤差を求める

まず，$r = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{3.10}{0.04108} = 75.46 \text{ cm}^2$ の誤差を求めると，

$$\Delta r = \left(\frac{\Delta\alpha}{\alpha} + \frac{\Delta\beta}{\beta}\right) r = 2.5 \text{cm}^2$$

r による誤差が最も影響が大きい（$\frac{\Delta r}{r} \sim 0.03$ に対し，$\frac{\Delta L}{L}, \frac{\Delta x_{CM}}{x_{CM}}$ ～0.005）ので，誤差の伝播の見積もりは r によるものだけを考えて，その最小値と最大値を(4)式に代入することで解析を簡単にすることができる。

ここで，$r_{\min} = r - \Delta r = 75.46 - 2.5 = 72.96$ を使うと，対応する 2 次方程式は，

$$(z-17.8)^2 + 3.529(z-17.8) - 72.96 = 0$$

である。対応する解は，$(z-17.8)_{\min} = 6.96$ cm である。

よって，　$\Delta(z-17.8)=\dfrac{7.55-6.96}{2}=0.3\text{ cm}$

また，$\dfrac{\Delta(z-17.8)}{z-17.8}\sim 0.04$ であるので，$\Delta L,\ \Delta x_{CM}$ による誤差の伝播は確かに無視できる。

誤差 Δz の見積もりは，　$\Delta z\approx\Delta(z-17.8)=0.3\text{ cm}$

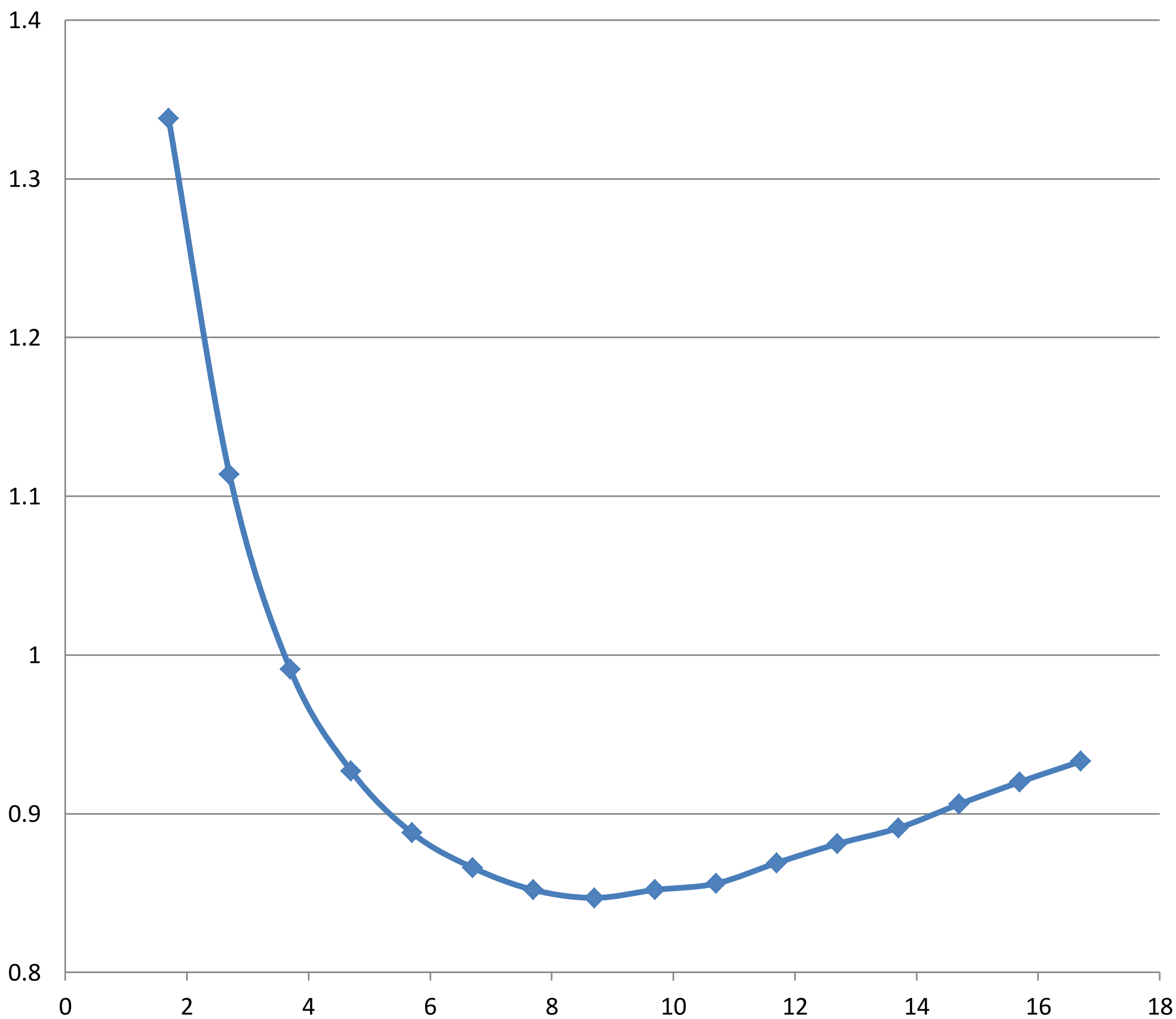
ii）$\dfrac{M}{m}$:の誤差を求める

$\dfrac{M}{m}=\dfrac{z-17.8}{2.8}$ であるので，

$$\Delta\left(\frac{M}{m}\right)=\frac{\Delta(z-17.8)}{2.8}=0.11$$

方法(b)

T-R のプロットの計算：



グラフの最小点において，$T = T_{\min}$ となるとき，$I_{CM} = (M+m)R_{\min}^2$，$g = \dfrac{8\pi^2 R_{\min}}{T_{\min}^2}$

グラフから，　$R_{\min} = 8.9 \pm 0.2$，$T_{\min} = 0.846 \pm 0.005$

$$\therefore \quad g = 982 \pm 40\,\text{cm/s}^2$$

$$I_{CM} = (M+m)(8.9)^2 = (79.21)(M+m) \qquad \cdots (16)$$

(14), (15), (16) 式から,

$$(79.21)(M+m) = 75.0M + 7.84M + m(z-17.8)^2$$

$$-3.63M + 79.21m = m(z-17.8)^2$$

$$(x-17.8)^2 + \frac{3.63}{2.8}(x-17.8) - 79.21 = 0$$

$$(z-17.8) = 8.28$$

よって,　$z = 2\ 6\ .\ 0{=}8 \qquad 2{\pm}6\ .\ 1$

$$\frac{M}{m} = 2\ .\ 9\ \cancel{5} \qquad 3{\pm}.$$

<u>誤差の見積もり</u>

ｉ)　g の誤差を求める。

最小点において，$g = \dfrac{8\pi^2 R_{\min}}{T_{\min}^2}$ なので,

$$\Delta g = \left(\frac{\Delta R_{\min}}{R_{\min}} + 2\frac{\Delta T_{\min}}{T_{\min}} \right) g = 34 \approx 30\,\mathrm{cm/s^2}$$

ⅱ)　z の誤差を求める。

まず，$r = R_{\min}^2 = 79.21\,\mathrm{cm}^2$ の誤差は,

$$\Delta r = 2R_{\min}\Delta R_{\min} = 3.56\,\mathrm{cm}^2$$

この r は方法(a)での r と同等であるから，方法(a)と同様の誤差解析をすればよい。

その結果は

$$z = 26.08 \approx 26.1\,\mathrm{cm}, \quad \Delta z = 0.8\ \mathrm{cm}$$

ⅱ)　$\dfrac{M}{m}$:の誤差を求める。

方法(a)と同様にして,　$\dfrac{M}{m} = 2.96$;　$\Delta(\dfrac{M}{m}) = 0.15$

なお，曲線の最小点をとるこの方法より直線フィットによる方法の方が誤差は小さい。