

## 第1問 金属球による鏡像【解答】

### 問1 鏡像法

(a) 金属球は接地しており，接地点の電位が0であるから，金属球表面の電位は，

$$V = 0$$

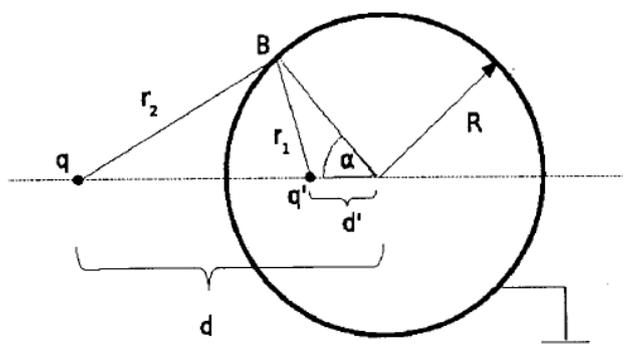


図1：点Bの電位はゼロである。

(b) 図1のように，球面上の任意の点Bから虚電荷 $q'$ および点電荷 $q$ までの距離を，それぞれ $r_1$ ， $r_2$ とし，図のように角度 $\alpha$ を定めると，余弦定理より，

$$r_1 = \sqrt{R^2 + d'^2 - 2Rd' \cos \alpha} \quad (1)$$

$$r_2 = \sqrt{R^2 + d^2 - 2Rd \cos \alpha} \quad (2)$$

点Bで電位0の条件より，

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q'}{r_1} + \frac{q}{r_2} \right) = 0 \quad (3)$$

$$\therefore \frac{q'}{r_1} + \frac{q}{r_2} = 0 \quad (4)$$

これより，(1)，(2)式を用いて，

$$r_2^2 = \left( \frac{q}{q'} \right)^2 r_1^2 \Rightarrow R^2 + d^2 - 2Rd \cos \alpha = \left( \frac{q}{q'} \right)^2 (R^2 + d'^2 - 2Rd' \cos \alpha) \quad (5)$$

(5)式は任意の $\alpha$ で成立することから，

$$R^2 + d^2 = \left( \frac{q}{q'} \right)^2 (R^2 + d'^2) \quad (6)$$

$$Rd = \left( \frac{q}{q'} \right)^2 Rd' \quad (7)$$

(6)，(7)式より $\left( \frac{q}{q'} \right)^2$ を消去して，

$$dd'^2 - (R^2 + d^2)d' + dR^2 = 0 \Rightarrow (dd' - R^2)(d' - d) = 0$$

で,  $d' \neq d$  より,

$$d' = \frac{R^2}{d} \quad (8)$$

これを(6)式へ代入して,

$$q'^2 = q^2 \frac{R^2}{d^2}$$

ここで, (4)式を考慮して,

$$q' = -q \frac{R}{d} \quad (9)$$

(c) 虚電荷  $q'$  が点電荷  $q$  に及ぼす力の大きさは,

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|qq'|}{(d-d')^2} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot q^2 \frac{R}{d} \cdot \frac{1}{\left(d - \frac{R^2}{d}\right)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 R d}{(d^2 - R^2)^2} \end{aligned} \quad (10)$$

$q$  と  $q'$  は逆符号であるから, この力は引力である。⇒ No

## 問2 静電場の遮蔽 (しゃへい/スクリーニング)

(a) 点 A における電場ベクトルは,

$$\vec{E}_A = \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{\left(r - (d-d')\right)^2} \right] \hat{r} = \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \frac{R}{d}}{\left(r - d + \frac{R^2}{d}\right)^2} \right] \hat{r} \quad (11)$$

ここで,  $\hat{r} = \vec{r}/r$  である。

(b)  $r \gg d$  より, 与えられた近似式を用いて,

$$\begin{aligned} \vec{E}_A &= \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \frac{R}{d}}{r^2} \left(1 - \frac{d}{r} + \frac{R^2}{dr}\right)^{-2} \right] \hat{r} \\ &= \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \frac{R}{d}}{r^2} \left(1 + \frac{2d}{r} - \frac{2R^2}{dr}\right) \right] \hat{r} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left(1 - \frac{R}{d}\right)q}{r^2} \hat{r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q \frac{R}{d} \left(d - \frac{R^2}{d}\right)}{r^3} \hat{r} \quad (12)$$

一般に、接地された金属球は距離  $d$  だけ離れた点にある点電荷  $q$  を完全には遮へいすることはできず、距離  $r$  だけ離れた点の電場に最も大きな寄与をする項は、クーロンの法則と同様に、 $r^{-2}$  に比例する。

(c)  $d \rightarrow R$  の極限で、点 A での電場は 0 になり、接地された金属球は、点電荷を完全に遮へいする。

### 問3 接地された金属球のつくる電場中での微小振動

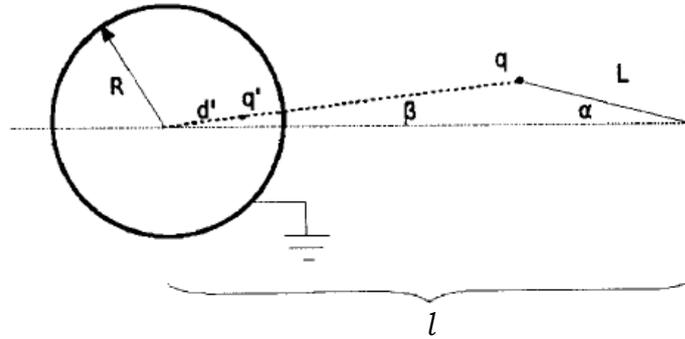


図2

(a) 虚電荷  $q'$  は図2のような位置に現れる。点電荷  $q$  と金属球の中心との距離を  $d$  とすると、余弦定理より、

$$d = \sqrt{l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha} \quad (13)$$

虚電荷  $q'$  から点電荷  $q$  に働く静電気力の大きさ  $F$  は、問1(c)より、

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 R d}{(d^2 - R^2)^2} \quad (14)$$

これに(13)式を代入して、

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 R \sqrt{l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha}}{\left(l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha - R^2\right)^2} \quad (15)$$

点電荷  $q$  に働く静電気力の向きは、図3のように表される。



$E_{el,1}$  と、球に誘導された電荷どうしによる静電エネルギー  $E_{el,2}$  に分けられる。つまり、

$$E_{el} = E_{el,1} + E_{el,2} \quad (21)$$

$N$  の電荷が球に誘導されるとし、電荷  $q_i$  が球面上の位置  $\vec{r}_i$  にあるとする。ここで、 $j=1, 2, \dots, N$  である。虚電荷による記述、すなわち、虚電荷による球面上および球外の任意の点の電位が誘導電荷による電位に等しいことから、

$$\frac{q'}{|\vec{r} - \vec{d}'|} = \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{|r_j - \vec{r}|} \quad (22)$$

ここで、 $\vec{r}$  は球外の任意の点の位置ベクトル  $\vec{d}$  は虚電荷の位置ベクトルである。 $\vec{r}$  が  $\vec{r}_i$  に位置するとき、(22)式は、

$$\frac{q'}{|\vec{r} - \vec{d}'|} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{q_j}{|r_j - \vec{r}|} \quad (23)$$

と表される。

球面上に誘導された電荷と外部電荷の相互作用によるエネルギーは、(22)式で  $\vec{r} = \vec{d}$  とおくことにより、

$$E_{el,1} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{|r_j - \vec{d}|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{|\vec{d} - \vec{d}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{d - d'} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 R}{d^2 - R^2} \quad (24)$$

こうして、相互作用エネルギー  $E_{el,1}$  は、虚電荷の定義から直接導かれることがわかる。

(b) 球面上の電位が 0 になる条件は、

$$\frac{q'}{|\vec{r} - \vec{d}'|} + \frac{q}{|\vec{r} - \vec{d}|} = 0 \quad (25)$$

と書かれる。(23)、(25)式を用いて、球面上に誘導された電荷どうしの相互作用エネルギーは、

$$\begin{aligned} E_{el,2} &= \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{q'}{|\vec{r}_i - \vec{d}'|} = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{q}{|\vec{r}_i - \vec{d}|} = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{|\vec{d}' - \vec{d}|} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{d - d'} = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 R}{d^2 - R^2} \end{aligned} \quad (26)$$

と求められる。

(c) (24), (26)式を(21)式に代入して,

$$E_{el} = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 R}{d^2 - R^2} \quad (27)$$

(別解)

(a) 点電荷  $q$  と虚電荷  $q'$  のもつ静電エネルギーとして

$$E_{el,1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{d-d'} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 R}{d^2 - R^2}$$

(c) 与えられた積分

$$\int_d^\infty \frac{x dx}{(x^2 - R^2)^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{d^2 - R^2}$$

を用いる。

全静電エネルギー  $E_{el}$  は, 点電荷  $q$  を無限遠から金属球の中心から距離  $d$  の点に運ぶのに必要な仕事に等しい。  $q$  にはたらく力は負の向きであることに注意して,

$$\begin{aligned} E_{el}(d) &= -\int_\infty^d F(\bar{x}) d\bar{x} = \int_d^\infty F(\bar{x}) d\bar{x} \\ &= -\int_d^\infty \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 R x}{(x^2 - R^2)^2} dx = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 R}{d^2 - R^2} \end{aligned}$$

(b) 球面上の電荷間の静電エネルギーは,

$$E_{el,2} = E_{el} - E_{el,1} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 R}{d^2 - R^2}$$

# 解答 - 第 2 問. 煙突の物理

## 問 1

a)  $p(z)$  を高度  $z$  における外気の圧力とする。仮定の一つ(空気の密度変化は無視)から,  $p(0)$  を高度 0 における外気の圧力とすると,

$$p(z) = p(0) - \rho_{Air}gz$$

煙突全体にベルヌーイの定理が成り立つから,

$$\frac{1}{2}\rho_{Smoke}v(z)^2 + \rho_{Smoke}gz + p_{smoke}(z) = const. \quad (1)$$

ここで,  $p_{smoke}(z)$  は高度  $z$  での煙の圧力,  $\rho_{Smoke}$  は密度,  $v(z)$  は速度。“煙突を通る煙の密度変化は無視できる” という条件を用いた。

式(1)を次の 2 点

(i) 高度  $z = -\varepsilon$  ( $\varepsilon$  は無視可能な正の微小量) の炉内,

(ii) 高度  $z = h$  の煙突の頂点,

に適用すると,

$$\frac{1}{2}\rho_{Smoke}v(h)^2 + \rho_{Smoke}gh + p_{smoke}(h) \approx p_{smoke}(-\varepsilon) \quad (2)$$

右辺では, (i) において気体の速度が無視できることと  $-\rho_{Smoke}g\varepsilon \approx 0$  を用いた。

煙突の頂点における煙の圧力は同じ高度における外気の圧力と等しいか, 大きいかであるが, 煙突が機能する最小の高さを考えているので,  $p_{smoke}(h) \approx p(h)$  としてよい。また, 炉内では  $p_{smoke}(-\varepsilon) \approx p(0)$  と置ける。したがって, ベルヌーイの定理を炉内と煙突の頂点に用いた式(2)は次のようになる:

$$\frac{1}{2}\rho_{Smoke}v(h)^2 + \rho_{Smoke}gh + p(h) \approx p(0) \quad (3)$$

よって, ( $p(0) = p(h) + \rho_{Air}gh$  に注意して)

$$v(h) = \sqrt{2gh\left(\frac{\rho_{Air}}{\rho_{Smoke}} - 1\right)} \quad (4)$$

煙突が十分機能するためには, 燃やした煙をすべて排出しなくてはならないから

$$v(h) \geq \frac{B}{A} \quad (5)$$

であり, 式(4), (5)から,

$$h \geq \frac{B^2}{A^2} \frac{1}{2g} \frac{1}{\frac{\rho_{Air}}{\rho_{Smoke}} - 1} \quad (6)$$

仮定により, 炉内の煙 (気圧  $p(0)$ , 温度  $T_{smoke}$ ) は理想気体とみなすことができ, 同じ温度, 同じ圧

力ならば外気と同じ密度をもつから、次式が成り立つ:

$$\frac{\rho_{Air}}{\rho_{Smoke}} = \frac{T_{Smoke}}{T_{Air}} \quad (7)$$

したがって、

$$h \geq \frac{B^2}{A^2} \frac{1}{2g} \frac{T_{Air}}{T_{Smoke} - T_{Air}} = \frac{B^2}{A^2} \frac{1}{2g} \frac{T_{Air}}{\Delta T} \quad (8)$$

最小の高さは等号の場合である。

- b) 寒い地域で働くように設計された煙突の高さ  $h(-30)$  が 100m のとき、暖かい地域の煙突の高さ  $h(30)$  は、

$$\frac{h(30)}{h(-30)} = \frac{\frac{T(30)}{T_{Smoke} - T(30)}}{\frac{T(-30)}{T_{Smoke} - T(-30)}} \quad (9)$$

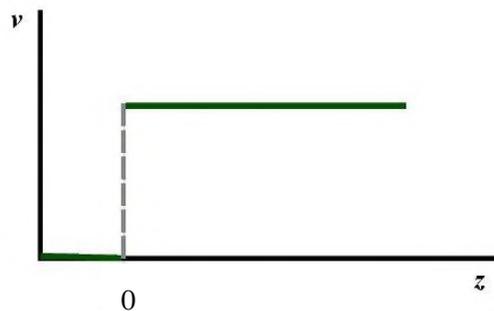
よって、

$$h(30) = 145\text{m}$$

- c) 速度は一定である。

$$v = \sqrt{2gh \left( \frac{\rho_{Air}}{\rho_{Smoke}} - 1 \right)} = \sqrt{2gh \left( \frac{T_{Smoke}}{T_{Air}} - 1 \right)} = \sqrt{2gh \frac{\Delta T}{T_{Air}}} \quad (10)$$

このことは、連続の式  $Av = \text{const.}$  ( $\rho_{Smoke}$  は一定) が成立することから分かる。煙が炉から煙突に入るとき、 $Av$  の値は、ほぼ 0 からこの一定値に突然変化する。最小の高さで稼働しているのだから、この一定値は  $B$  に等しい。つまり、 $v = \frac{B}{A}$  である。



- d) 式(1)で  $\text{const.} \approx p_{smoke}(-\varepsilon) \approx p(0)$  であり、 $(\rho_{Air} - \rho_{smoke})gh = \frac{1}{2} \rho_{smoke} v^2$  だから、高さ  $z$  での煙の圧力は、

$$p_{smoke}(z) = p(0) - (\rho_{Air} - \rho_{Smoke})gh - \rho_{Smoke}gz \quad (11)$$

煙の圧力は、煙が炉から煙突に入り、速度をもった時に急に変化(減少)する。

## 問 2

a)  $\Delta t$  の間に放出される温かい空気(煙)の運動エネルギーは,

$$E_{kin} = \frac{1}{2}(Av\Delta t\rho_{Hot})v^2 = Av\Delta t\rho_{Hot}gh\frac{\Delta T}{T_{Air}} \quad (12)$$

添字 *Hot* は太陽によって温められた温かい空気に関するものであることを示す。単位時間に煙突から排出される温かい空気の質量を  $w = Av\rho_{Hot}$  とすると、上の運動エネルギーに相当する仕事率は,

$$P_{kin} = wgh\frac{\Delta T}{T_{Air}} \quad (13)$$

これが、温かい空気の流れの運動エネルギーから得られる最大の仕事率である。

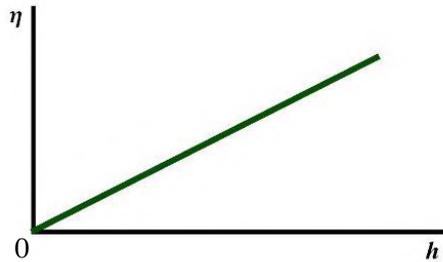
太陽エネルギーは空気を暖めるのに使われ,

$$P_{Sun} = GS = wc\Delta T \quad (14)$$

であるから、効率は,

$$\eta = \frac{P_{kin}}{P_{Sun}} = \frac{gh}{cT_{Air}} \quad (15)$$

b) 変化は明らかに線形(直線)である。



## 問 3

a) 実験煙突の発電効率は,

$$\eta = \frac{gh}{cT_{Air}} = 0.0064 = 0.64\% \quad (16)$$

b) 電力は、集熱部の直径を  $D$  として,

$$P = GS\eta = G(D/2)^2\pi\eta = 45\text{kW} \quad (17)$$

c) 1日8時間晴れているとして、実験煙突で1日に生み出されているエネルギーは,

$$45 \times 8 = 360\text{kWh}$$

## 問 4

a) 単位時間あたり煙突内に流れ込む空気の質量は,

$$w = Av\rho_{Hot} = A \sqrt{2gh \frac{\Delta T}{T_{Air}}} \rho_{Hot} \quad (18)$$

また,

$$w = \frac{GS}{c\Delta T} \quad (19)$$

これらより,

$$\Delta T = \left( \frac{G^2 S^2 T_{Air}}{A^2 c^2 \rho_{Hot}^2 2gh} \right)^{1/3} \approx 9.1\text{K} \quad (20)$$

b) 単位時間あたり流れ込む空気の質量の数値は,

$$w = \frac{GS}{c\Delta T} = 762\text{kg/s} \quad (21)$$

## 第 3 問解答—原子核の簡単なモデル

### 問 1- 核子がぎっしり詰まっている原子核

- a) 単純立方晶系では各格子点に位置する核子は互いに隣り合う 8 つの単位立方格子に共有されているので、単位格子 1 つあたりに含まれる核子は 1 個である。我々のモデルでは核子同士は接しているから単位立方格子の一辺の長さは  $a = 2r_N$  である。したがって核子 1 個の体積は、

$V_N = \frac{4}{3} r_N^3 \pi = \frac{4}{3} \left( \frac{a}{2} \right)^3 \pi = \frac{\pi}{6} a^3$	(1)
--	-----

これより、

$f = \frac{V_N}{a^3} = \frac{\pi}{6} \approx 0.52$	(2)
--	-----

- b) 原子核の質量密度は、

$\rho_m = f \frac{m_N}{V_N} = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{m_N}{\frac{4}{3} r_N^3 \pi} = \frac{m_N}{8 r_N^3} = \frac{1.67 \cdot 10^{-27}}{8 \cdot (0.85 \cdot 10^{-15})^3} \approx 3.40 \cdot 10^{17} \text{ kg/m}^3$	(3)
--	-----

となる。陽子の数と中性子の数が近似的に等しいことを考慮して電荷密度は

$\rho_c = \frac{f e}{2 V_N} = \frac{\pi}{12} \cdot \frac{e}{\frac{4}{3} r_N^3 \pi} = \frac{e}{16 r_N^3} = \frac{1.602 \cdot 10^{-19}}{16 \cdot (0.85 \cdot 10^{-15})^3} \approx 1.63 \cdot 10^{25} \text{ C/m}^3$	(4)
---	-----

となる。

核子が占める総体積は、

$V = \frac{A V_N}{f}$	(5)
-----------------------	-----

これより原子核の半径と核子の数の関係式が次のように求められる。

$R = r_N \left( \frac{A}{f} \right)^{1/3} = \frac{r_N}{f^{1/3}} A^{1/3} = \frac{0.85}{0.52^{1/3}} A^{1/3} \approx 1.06 \text{ fm} \cdot A^{1/3}$	(6)
--	-----

## 問 2 - 原子核の結合エネルギー：体積 - 表面積の項

まず原子核の表面にある核子の数を見積もらなければならない。そのような核子は表面から幅  $2r_N$  の球殻の中にある。

$  \begin{aligned}  V_{surface} &= \frac{4}{3}R^3\pi - \frac{4}{3}(R-2r_N)^3\pi \\  &= \frac{4}{3}R^3\pi - \frac{4}{3}R^3\pi + \frac{4}{3}\pi \cdot 3R^2 \cdot 2r_N - \frac{4}{3}\pi \cdot 3R \cdot 4r_N^2 + \frac{4}{3}\pi \cdot 8r_N^3 \\  &= 8\pi \left( R^2r_N - 2Rr_N^2 + \frac{4}{3}r_N^3 \right)  \end{aligned}  $	(7)
---	-----

表面にある核子の数は

$  \begin{aligned}  A_{surface} &= f \frac{V_{surface}}{V_N} = f \frac{8\pi \left( R^2r_N - 2Rr_N^2 + \frac{4}{3}r_N^3 \right)}{\frac{4}{3}r_N^3\pi} \\  &= 6f \left( \left( \frac{R}{r_N} \right)^2 - 2 \left( \frac{R}{r_N} \right) + \frac{4}{3} \right) \\  &= 6f \left( \left( \frac{A}{f} \right)^{2/3} - 2 \left( \frac{A}{f} \right)^{1/3} + \frac{4}{3} \right) \\  &= 6f^{1/3} A^{2/3} - 12f^{2/3} A^{1/3} + 8f \\  &= 6^{2/3} \pi^{1/3} A^{2/3} - 2 \cdot 6^{1/3} \pi^{2/3} A^{1/3} + \frac{4}{3} \pi \\  &\approx 4.84A^{2/3} - 7.80A^{1/3} + 4.19  \end{aligned}  $	(8)
--	-----

よって結合エネルギーは

$  \begin{aligned}  E_b &= (A - A_{surface})a_V + A_{surface} \frac{a_V}{2} \\  &= Aa_V - A_{surface} \frac{a_V}{2} \\  &= Aa_V - \left( 3f^{1/3} A^{2/3} - 6f^{2/3} A^{1/3} + 4f \right) a_V \\  &= Aa_V - 3f^{1/3} A^{2/3} a_V + 6f^{2/3} A^{1/3} a_V - 4fa_V \\  &= (15.8A - 38.20A^{2/3} + 61.58A^{1/3} - 33.09) \text{MeV}  \end{aligned}  $	(9)
---	-----

### 問 3 - 結合エネルギーにおける静電（クーロン）効果

a)  $Q_0$  を  $Ze$  で置き換えると原子核の静電エネルギーは、

$U_c = \frac{3(Ze)^2}{20\pi\epsilon_0 R} = \frac{3Z^2 e^2}{20\pi\epsilon_0 R}$	(10)
--	------

となる。各々の陽子が自身と相互作用しないことを考えて得られた式で  $Z^2$  を  $Z(Z-1)$  で置き換えて次式を得る。

$U_c = \frac{3Z(Z-1)e^2}{20\pi\epsilon_0 R}$	(11)
--	------

b) 静電相互作用の結合エネルギーへの寄与は次のようになる。

$\begin{aligned} \Delta E_b &= -\frac{3e^2 f^{1/3}}{20\pi\epsilon_0 r_N} \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} = -\frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} \cdot 1.31 \times 10^{-13} \text{J} \\ &= -\frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} \cdot 0.820 \text{MeV} \\ &\approx -\left(\frac{A^{5/3}}{4} - \frac{A^{2/3}}{2}\right) \cdot 0.820 \text{MeV} = (-0.205A^{5/3} + 0.410A^{2/3}) \text{MeV} \end{aligned}$	(12)
--	------

ここで式(11)の静電エネルギーの公式で  $R$  を  $r_N f^{-1/3} A^{1/3}$  で置き換え、 $Z \approx A/2$  を用いた。クーロン斥力は結合エネルギーを打ち消すようにはたらくので、符号は負である。よって結合エネルギーの完全な形は次のようになる。

$E_b = Aa_v - 3f^{1/3} A^{2/3} a_v + 6f^{2/3} A^{1/3} a_v - 4fa_v - \frac{3e^2 f^{1/3}}{20\pi\epsilon_0 r_N} \left(\frac{A^{5/3}}{4} - \frac{A^{2/3}}{2}\right)$	(13)
--	------

### 問 4 - 重い原子核の分裂

a) (生成された原子核の全運動エネルギー) = (生成された 2 つの原子核の結合エネルギー) - (分裂前の元の原子核の結合エネルギー) - (2 つの原子核の間の静電エネルギー)

で与えられる。  $R(A/2) = 2^{-1/3} R$  なので、

$ \begin{aligned} E_{kin}(d) &= 2E_b\left(\frac{A}{2}\right) - E_b(A) - \frac{(Ze/2)^2}{4\pi\epsilon_0 d} \\ &= -3f^{1/3}A^{2/3}a_V(2^{1/3}-1) + 6f^{2/3}A^{1/3}a_V(2^{2/3}-1) \\ &\quad - 4fa_V - \frac{3e^2f^{1/3}}{20\pi\epsilon_0 r_N} \left[ \frac{A^{5/3}}{4}(2^{-2/3}-1) - \frac{A^{2/3}}{2}(2^{1/3}-1) \right] \\ &\quad - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{A^2 e^2}{16d} \end{aligned} $	(14)
---	------

(最初の項  $Aa_V$  は打ち消しあう)。

b)  $d = 2R(A/2)$  とすると運動エネルギーは、

$ \begin{aligned} E_{kin} &= 2E_b\left(\frac{A}{2}\right) - E_b(A) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2^{1/3}A^2 e^2 f^{1/3}}{16 \cdot 2r_N A^{1/3}} \\ &= -3f^{1/3}A^{2/3}a_V(2^{1/3}-1) + 6f^{2/3}A^{1/3}a_V(2^{2/3}-1) \\ &\quad - 4fa_V - \frac{3e^2f^{1/3}}{20\pi\epsilon_0 r_N} \left[ \frac{2^{-2/3}-1}{4} + \frac{20}{3} \frac{2^{1/3}}{128} \right] A^{5/3} + \frac{3e^2f^{1/3}}{20\pi\epsilon_0 r_N} \frac{2^{1/3}-1}{2} A^{2/3} \\ &= (0.02203A^{5/3} - 9.8236A^{2/3} + 36.175A^{1/3} - 33.091)\text{MeV} \end{aligned} $	(15)
--	------

となる。 $A=100, 150, 200, 250$  をそれぞれ代入すると、

$$A=100 \dots E_{kin} = -29.36\text{MeV}$$

$$A=150 \dots E_{kin} = -24.92\text{MeV}$$

$$A=200 \dots E_{kin} = -6.817\text{MeV}$$

$$A=250 \dots E_{kin} = 23.51\text{MeV}$$

我々のモデルでは  $E_{kin}(d = 2R(A/2)) \geq 0$  のときに分裂が可能である。

上の計算から分裂可能な最小の  $A$  は  $A \approx 212$  程度と見積もることができる。次の不等式をより正確に数値的に評価すると、

$E_{kin} = (0.02203A^{5/3} - 9.8236A^{2/3} + 36.175A^{1/3} - 33.091)\text{MeV} \geq 0$	(16)
--	------

$A \geq 214$  を得る。

## 問 5 - 移行反応

a) この問いは非相対論的に解いても相対論的に解いてもよい。

### 非相対論的な解法

まず反応過程でエネルギーに変換された質量を求める。(質量に変換されたエネルギーは Q 値と呼ばれる)

$\begin{aligned}\Delta m &= (\text{反応前の全質量}) - (\text{反応後の全質量}) \\ &= (57.93535 + 12.00000) \text{a.m.u.} - (53.93962 + 15.9949) \text{a.m.u.} \\ &= 0.00082 \text{a.m.u.} \\ &= 1.3616 \cdot 10^{-30} \text{kg}\end{aligned}$	(17)
--	------

質量とエネルギーの等価性に関するアインシュタインの公式を用いると,

$\begin{aligned}Q &= (\text{反応前の全運動エネルギー}) - (\text{反応後の全運動エネルギー}) \\ &= -\Delta m \cdot c^2 \\ &= -1.3616 \cdot 10^{-30} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = -1.2254 \cdot 10^{-13} \text{J}\end{aligned}$	(18)
--	------

1MeV = 1.602 · 10<sup>-13</sup>J であるから,

$Q = -1.2254 \cdot 10^{-13} / 1.602 \cdot 10^{-13} = -0.765 \text{MeV}$	(19)
---	------

エネルギー保存則と運動量保存則を用いてこの問題は解かれる。運動量保存則は(我々が興味があるのは <sup>12</sup>C と <sup>16</sup>O が同じ方向に運動する場合だからベクトルを用いなくてよい),

$m(^{16}\text{O})v(^{16}\text{O}) = m(^{12}\text{C})v(^{12}\text{C}) + m(^{58}\text{Ni})v(^{58}\text{Ni})$	(20)
--	------

またエネルギー保存則は,

$E_k(^{16}\text{O}) + Q = E_k(^{12}\text{C}) + E_k(^{58}\text{Ni}) + E_x(^{58}\text{Ni})$	(21)
---	------

ここで  $E_x(^{58}\text{Ni})$  は <sup>58</sup>Ni の励起エネルギーで, Q はすでに計算した Q 値である。

<sup>12</sup>C と <sup>16</sup>O が同じ速度を持つので, 運動量保存則は次のように書き下される。

$[m(^{16}\text{O}) - m(^{12}\text{C})]v(^{16}\text{O}) = m(^{58}\text{Ni})v(^{58}\text{Ni})$	(22)
--	------

以上より <sup>58</sup>Ni の運動エネルギーを求めるのは容易である。

$ \begin{aligned} E_k(^{58}\text{Ni}) &= \frac{m(^{58}\text{Ni})v(^{58}\text{Ni})^2}{2} = \frac{[m(^{58}\text{Ni})v(^{58}\text{Ni})]^2}{2m(^{58}\text{Ni})} \\ &= \frac{[m(^{16}\text{O}) - m(^{12}\text{C})]^2 v(^{16}\text{O})^2}{2m(^{58}\text{Ni})} \\ &= E_k(^{16}\text{O}) \frac{[m(^{16}\text{O}) - m(^{12}\text{C})]^2}{m(^{58}\text{Ni})m(^{16}\text{O})} \end{aligned} $	(23)
--	------

そして  $^{58}\text{Ni}$  の励起エネルギーは、

$ \begin{aligned} E_x(^{58}\text{Ni}) &= E_k(^{16}\text{O}) + Q - E_k(^{12}\text{C}) - E_k(^{58}\text{Ni}) \\ &= E_k(^{16}\text{O}) + Q - \frac{m(^{12}\text{C})v(^{16}\text{O})^2}{2} - E_k(^{16}\text{O}) \frac{[m(^{16}\text{O}) - m(^{12}\text{C})]^2}{m(^{58}\text{Ni})m(^{16}\text{O})} \\ &= Q + E_k(^{16}\text{O}) - E_k(^{16}\text{O}) \frac{m(^{12}\text{C})}{m(^{16}\text{O})} - E_k(^{16}\text{O}) \frac{[m(^{16}\text{O}) - m(^{12}\text{C})]^2}{m(^{58}\text{Ni})m(^{16}\text{O})} \\ &= Q + E_k(^{16}\text{O}) \left[ 1 - \frac{m(^{12}\text{C})}{m(^{16}\text{O})} - \frac{[m(^{16}\text{O}) - m(^{12}\text{C})]^2}{m(^{58}\text{Ni})m(^{16}\text{O})} \right] \\ &= Q + E_k(^{16}\text{O}) \frac{[m(^{16}\text{O}) - m(^{12}\text{C})][m(^{58}\text{Ni}) - m(^{16}\text{O}) + m(^{12}\text{C})]}{m(^{58}\text{Ni})m(^{16}\text{O})} \end{aligned} $	(24)
--	------

となる。最後の式の第 2 項の分子の最初の括弧は移行されたクラスター ( $^4\text{He}$ ) の質量に近似的に等しく、2 番目の括弧は標的である  $^{54}\text{Fe}$  の質量に近似的に等しいことに注意せよ。数値を代入して以下を得る。

$ \begin{aligned} E_x(^{58}\text{Ni}) &= -0.765 + 50 \cdot \frac{(15.99491 - 12)(57.93535 - 15.99491 + 12)}{57.93535 \cdot 15.99491} \\ &= 10.862 \text{ MeV} \end{aligned} $	(25)
---	------

### 相対論的な解法

相対論的にこの問題を解くには次の 2 式から始める (1 つ目はエネルギー保存則、2 つ目は運動量保存則である)。

$ m(^{54}\text{Fe}) \cdot c^2 + \frac{m(^{16}\text{O}) \cdot c^2}{\sqrt{1 - v(^{16}\text{O})^2 / c^2}} = \frac{m(^{12}\text{C}) \cdot c^2}{\sqrt{1 - v(^{12}\text{C})^2 / c^2}} + \frac{m^*(^{58}\text{Ni}) \cdot c^2}{\sqrt{1 - v(^{58}\text{Ni})^2 / c^2}} $	(26)
--	------

$ \frac{m(^{16}\text{O})v(^{16}\text{O})}{\sqrt{1 - v(^{16}\text{O})^2 / c^2}} = \frac{m(^{12}\text{C})v(^{12}\text{C})}{\sqrt{1 - v(^{12}\text{C})^2 / c^2}} + \frac{m^*(^{58}\text{Ni})v(^{58}\text{Ni})}{\sqrt{1 - v(^{58}\text{Ni})^2 / c^2}} $	(27)
---	------

式中の質量はすべて静止質量である。 $^{58}\text{Ni}$  は基底状態ではなく、励起状態にある  
(励起状態での質量を  $m^*$  で示した)。 $^{12}\text{C}$  と  $^{16}\text{O}$  が同じ速度を持つので、

$m(^{54}\text{Fe}) + \frac{m(^{16}\text{O}) - m(^{12}\text{C})}{\sqrt{1 - v(^{16}\text{O})^2/c^2}} = \frac{m^*(^{58}\text{Ni})}{\sqrt{1 - v(^{58}\text{Ni})^2/c^2}}$ $\frac{(m(^{16}\text{O}) - m(^{12}\text{C})) \cdot v(^{16}\text{O})}{\sqrt{1 - v(^{16}\text{O})^2/c^2}} = \frac{m^*(^{58}\text{Ni}) \cdot v(^{58}\text{Ni})}{\sqrt{1 - v(^{58}\text{Ni})^2/c^2}}$	(28)
--	------

となる。第 2 式を第 1 式で除すると、

$v(^{58}\text{Ni}) = \frac{(m(^{16}\text{O}) - m(^{12}\text{C})) \cdot v(^{16}\text{O})}{(m(^{16}\text{O}) - m(^{12}\text{C})) + m(^{54}\text{Fe}) \sqrt{1 - v(^{16}\text{O})^2/c^2}}$	(29)
--	------

を得る。

ところで入射粒子 ( $^{16}\text{O}$ ) の速度はその運動エネルギーから求めることができる。

$E_{kin}(^{16}\text{O}) = \frac{m(^{16}\text{O}) \cdot c^2}{\sqrt{1 - v(^{16}\text{O})^2/c^2}} - m(^{16}\text{O}) \cdot c^2$ $\sqrt{1 - v(^{16}\text{O})^2/c^2} = \frac{m(^{16}\text{O}) \cdot c^2}{E_{kin}(^{16}\text{O}) + m(^{16}\text{O}) \cdot c^2}$ $v(^{16}\text{O})^2/c^2 = 1 - \left( \frac{m(^{16}\text{O}) \cdot c^2}{E_{kin}(^{16}\text{O}) + m(^{16}\text{O}) \cdot c^2} \right)^2$ $v(^{16}\text{O}) = \sqrt{1 - \left( \frac{m(^{16}\text{O}) \cdot c^2}{E_{kin}(^{16}\text{O}) + m(^{16}\text{O}) \cdot c^2} \right)^2} \cdot c$	(30)
--	------

数値を代入して、

$v(^{16}\text{O}) = \sqrt{1 - \left( \frac{15.99491 \cdot 1.6605 \cdot 10^{-27} \cdot (3 \cdot 10^8)^2}{50 \cdot 1.602 \cdot 10^{-13} + 15.99491 \cdot 1.6605 \cdot 10^{-27} \cdot (3 \cdot 10^8)^2} \right)^2} \cdot c$ $= \sqrt{1 - 0.99666^2} \cdot c = 0.08166 \cdot c = 2.4499 \cdot 10^7 \text{ m/s}$	(31)
---	------

よって、

$v(^{58}\text{Ni}) = \frac{(15.99491 - 12) \cdot 2.4499 \cdot 10^7}{(15.99491 - 12) + 53.93962 \sqrt{1 - 0.08166^2}} = 1.6946 \cdot 10^6 \text{ m/s}$	(32)
---	------

と求められる。すると励起状態の  $^{58}\text{Ni}$  の質量は、

$m^*(^{58}\text{Ni}) = (m(^{16}\text{O}) - m(^{12}\text{C})) \frac{\sqrt{1 - v(^{58}\text{Ni})^2 / c^2}}{\sqrt{1 - v(^{16}\text{O})^2 / c^2}} \cdot \frac{v(^{16}\text{O})}{v(^{58}\text{Ni})}$ $= (15.99491 - 12.) \frac{\sqrt{1 - (1.6946 \cdot 10^6 / 3 \cdot 10^8)^2}}{\sqrt{1 - 0.08166^2}} \cdot \frac{2.4499 \cdot 10^7}{1.6946 \cdot 10^6} \text{ a.m.u.}$ $= 57.9474 \text{ a.m.u.}$	(33)
---	------

よって  $^{58}\text{Ni}$  の励起エネルギーは、

$E_x = [m^*(^{58}\text{Ni}) - m(^{58}\text{Ni})] \cdot c^2 = (57.9474 - 57.93535) \cdot 1.6605 \cdot 10^{-27} \cdot (3 \cdot 10^8)^2$ $= 1.8008 \cdot 10^{-12} \text{ J} = 11.2410 \text{ MeV}$	(34)
---	------

と求められる。

相対論的に計算した結果と非相対論的に計算した結果を比べると、  
 $(11.2410 - 10.862) / 10.862 = 0.035$  と、接近しているので、相対論的な効果は小さい。  
 次の問では励起エネルギーとして非相対論的に計算した数値を用いる。

b) 静止した原子核からの光子の放出についてエネルギー保存則と運動量保存則は、

$E_x(^{58}\text{Ni}) = E_\gamma + E_{\text{recoil}}$ $p_\gamma = p_{\text{recoil}}$	(35)
---	------

当然光子（ガンマ線）と反跳した原子核の運動の向きは正反対である。光子のエネルギーと運動量について、

$E_\gamma = p_\gamma \cdot c$	(36)
-------------------------------	------

が成り立つ。

a) で見たように原子核の運動は非相対論的なエネルギー領域で起こるから、

$E_{\text{recoil}} = \frac{p_{\text{recoil}}^2}{2m(^{58}\text{Ni})} = \frac{p_\gamma^2}{2m(^{58}\text{Ni})} = \frac{E_\gamma^2}{2m(^{58}\text{Ni}) \cdot c^2}$	(37)
--	------

この式を式(35)に代入すると、

$E_x(^{58}\text{Ni}) = E_\gamma + E_{\text{recoil}} = E_\gamma + \frac{E_\gamma^2}{2m(^{58}\text{Ni}) \cdot c^2}$	(38)
---	------

この式から次の2次方程式を得る。

$E_\gamma^2 + 2m(^{58}\text{Ni})c^2E_\gamma - 2m(^{58}\text{Ni})c^2E_x(^{58}\text{Ni}) = 0$	(39)
---	------

これを解いて、

$E_\gamma = \sqrt{(m(^{58}\text{Ni})c^2)^2 + 2m(^{58}\text{Ni})c^2E_x(^{58}\text{Ni})} - m(^{58}\text{Ni})c^2$ $= 10.8609\text{MeV}$	(40)
---	------

反跳エネルギーは、

$E_{\text{recoil}} = E_x(^{58}\text{Ni}) - E_\gamma = 1.1\text{keV}$	(41)
--	------

である。

ガンマ線を放出した原子核 ( $^{58}\text{Ni}$ ) は高速で移動するので、ガンマ線のエネルギーはドップラー効果で変化する。光源が観測者に向かって移動するときの相対論的なドップラー効果は次の公式にしたがう。

$f_{\text{detector}} = f_{\gamma,\text{emitted}} \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$	(42)
--	------

ここに  $\beta=v/c$  で、 $v$  は  $^{58}\text{Ni}$  の速さである。光子のエネルギーと振動数には  $E=hf$  という関係があるから、エネルギーについて同様の表現を得る。よって、

$E_{\text{detector}} = E_{\gamma,\text{emitted}} \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = 10.861 \sqrt{\frac{1+5.65 \cdot 10^{-3}}{1-5.65 \cdot 10^{-3}}} = 10.923\text{MeV}$	(43)
---	------