IPhO2009

理論問題
2009年7月13日

まず，以下の指示を読んで下さい。

1. 理論試験は5時間です。
2. 与えられた鉛筆のみを用いなさい。
3. 用紙の表（おもて）のみを用いなさい。
4. 数値の計算には，与えられた電卓のみを用いなさい。
5. 各々の問題用紙は異なる色であることに注意して下さい。第1問は赤（ピンク），第2問は青，第3問は黄色です。
6. 各々の設問は，”Q”と左上に書かれた問題用紙にあります。
7. 得た解答は，”A”と左上に書かれた解答用紙にまとめて書きなさい。
8. さらに，”W”と左上に書かれた下書き用紙には，途中経過を書きなさい。評価の対象になります。また，数値の計算結果は，問題で要求される有効桁数で書きなさい。
9. 問題の解答に必要と思うことは下書き用紙に書きなさい。文章はできるだけ少なくし，方程式や数字，図やグラフを中心に使いなさい。
10. 各々の問題の各々の用紙（問題用紙，解答用紙と下書き用紙）の上にある記入欄中に，学生番号（Student code），現在のページ番号（Page No.）と総ページ数（Total No. of pages）を記入しなさい。もし，下書き用紙に書いた事柄を評価対象外としたい場合には，その下書き用紙を破棄しないこと。かわりに，下書き用紙全体に大きな×印を書いて，その下書き用紙にはページ数を記入しないこと。
11. 試験の最後に，各々の問題のすべての用紙を以下の順序で並べなさい。
    - 解答用紙
    - 順番に並べた使用した下書き用紙
    - 評価対象外としたい下書き用紙（大きな×印を書いておく）
    - 使用していない下書き用紙
    - 印刷された問題用紙

    各々の問題の用紙を，対応する色のフォルダにはさみ，それらをまとめて封筒に入れ，机の上に置きなさい。いかなる用紙も計算機も室外に持ち出してはいけません。

理論第１問

地球・月系の時間発展

科学者は地球と月の間の距離を極めて正確に決定することができる。1969 年に宇宙飛行士が月の表面に設置した特殊な鏡にレーザー光線を反射させ，光の往復時間を計測することにより（図 1 参照），この距離を決めるのである。

図 1. 天文台から送られたレーザー光線を使って地球と月の間の距離が正確に決定される。

この観測によって，月が地球からゆっくりと離れていることが，直接計測されたのである。つまり，地球と月の間の距離は時間の経過とともに増加している。このことが起こるのは，潮汐で生じたトルク（力のモーメント）によって地球の角運動量が月に移るからである（図 2 参照）。この問題では，この現象の基本的なパラメーターを導出する。

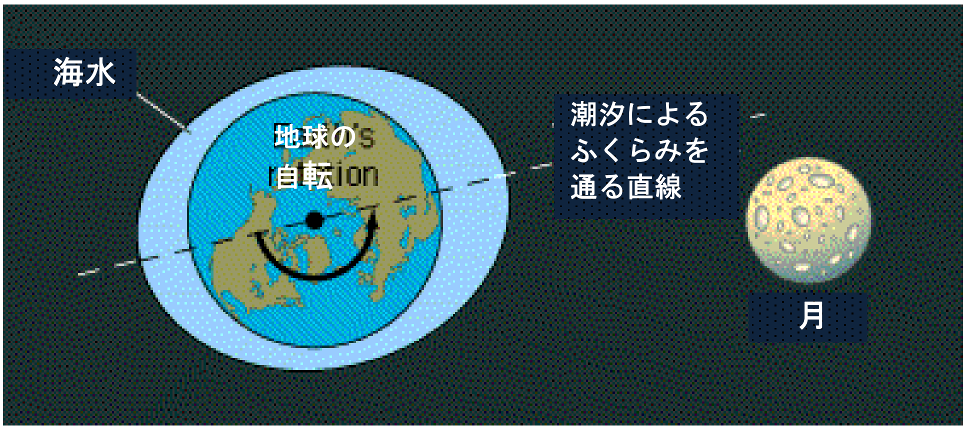


図 2. 月の重力は地球上の海水の変形（ふくらみ）を引き起こす。地球の回転により，ふくらみを通る直線は地球と月を結ぶ直線とは一致しない。この方向の違いが，地球の自転から月の公転運動に角運動量を移すトルクを発生させる。図は正しい縮尺ではない。

1.　角運動量保存則

L_1 は地球と月からなる系の全角運動量を表すものとする。ここで，以下のような仮定をする。

i) L_1 は地球の回転軸のまわりの自転の角運動量と，地球を回る軌道上の月の公転運動の角運動量との和である。

ii) 月の軌道は円であり，月は質点であるとする。

iii) 地球の自転軸と月の公転軸は平行である。

iv)計算を簡単にするため，地球の自転と月の公転運動の中心は地球の中心であると考える。また，この問題を通じて，すべての慣性モーメント，トルク，角運動量は地球の中心軸の回りに定義される。

v) 太陽による影響は無視する。

1a	この地球と月からなる系の現在の全角運動量を式で表せ。すなわち，現在の全角運動量 L_1 を，地球の慣性モーメント I_E，地球の現在の自転の角速度 ω_{E1} ,月の現在の地球中心軸の回りの慣性モーメント I_{M1} ,月の現在の公転運動の角速度 ω_{M1},を用いて表せ。	0.2

地球の自転運動から月の公転運動への角運動量の移動が終わるのは，地球の自転周期が，月の地球の回りの公転周期と同じ時間になるときである。このとき，月によって地表に引き起こされた海水のふくらみが，地球と月を結ぶ直線と一致し，トルクが生じなくなる。

1b	問 1a と同じ仮定をし，地球の慣性モーメント I_E，地球の最終的な角速度であり月の公転運動の角速度でもある ω_2，地球の中心のまわりの月の慣性モーメントを I_{M2} を用いて，地球と月からなる系の最終的な全角運動量 L_2 を表せ。	0.2

1c	最終的な全角運動量のうち，地球の角運動量は十分小さいので無視して，現在と最終的な状態の間の角運動量保存則を表す式を記せ。	0.3

2. 地球と月の最終的な距離と最終的な角速度

地球の回りを回る月についての，万有引力による円運動の方程式は常に成り立っているとする。最終的な全角運動量のうちの地球の角運動量は十分小さいので無視する。

2a	最終状態における地球の回りを回る月について考える。そのときの月についての万有引力による円運動の方程式から，以下の量の間に成り立つ関係式を記せ。地球の質量 M_E, 最終的な角速度 ω_2, 万有引力定数 G ,地球と月の間の最終的な距離 D_2 。	0.2

2b	地球と月の間の最終的な距離 D_2 を，地球と月からなる系の全角運動量 L_1, 地球の質量 M_E, 月の質量 M_M, 重力定数 G という既知のパラメーターを用いて表せ。	0.5

2c	地球と月からなる系の最終の角速度 ω_2 を，既知のパラメーター L_1, M_E, M_M , G を用いて表せ。	0.5

以下では， D_2 と ω_2 の数値解を求める。そのために，地球の慣性モーメントが必要である。

2d	地球が球であり，中心から半径 r_i までは一様な密度 ρ_i であり，半径 r_i から半径 r_o の表面までは一様な密度 ρ_o であるとする（図３参照）。この場合に地球の慣性モーメント I_E をこれらの密度 ρ_i , ρ_o と半径 r_i ， r_o を用いて表せ。	0.5

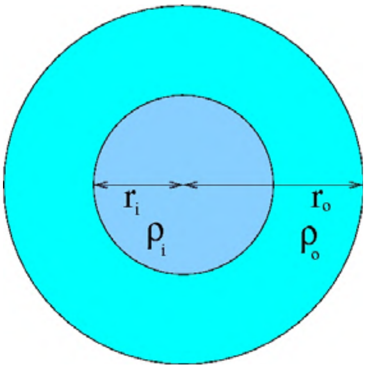


図 3　内部に２つの密度，ρ_i と ρ_o の部分をもつ球としての地球

この問題で求められている数値は，有効数字２桁で求めよ。

2e	$\rho_i = 1.3\times10^4$ kg/m^3，$r_i = 3.5\times10^6$ m，$\rho_o = 4.0\times10^3$ kg/m^3，$r_o = 6.4\times10^6$ m を用いて，地球の慣性モーメント I_E の数値を求めよ。	0.2

地球と月の質量は，それぞれ $M_E = 6.0\times10^{24}$ kg，$M_M = 7.3\times10^{22}$ kg である。現在の地球と月の距離は $D_1 = 3.8\times10^8$ m である。地球の自転運動の現在の角速度は $\omega_{E1} = 7.3\times10^{-5}$ rad/s である。月の地球の回りの公転運動の角速度は $\omega_{M1} = 2.7\times10^{-6}$ rad/s である。万有引力定数は $G = 6.7\times10^{-11}$ Nm^2 /kg^2 である。

2f	地球と月からなる系の全角運動量 L_1 を求めよ。	0.2

2g	最終的な地球と月の距離 D_2 をメートル単位で表せ。また現在の距離 D_1 の何倍であるか，有効数字２桁で求めよ。	0.3

2h	最終的な角速度 ω_2 を rad/s 単位で表せ。また，最終的な１日の長さ，すなわちこの角速度で１周する時間を現在の１日を単位として表せ。	0.3

最終的な全角運動量のうちの地球の自転の角運動量は十分小さいので無視できるとみなしたことは，最終的な地球の自転運動の角運動量と月の公転運動の

角運動量の比を求めることによって正当化されることを確かめよう。この比は小さいはずである。

2i	最終的な地球の自転運動の角運動量と月の公転運動の角運動量の比を求めよ。	0.2

3. 月は１年間にどれだけ遠ざかるか？

さて，一年にどれだけ月が遠ざかるかを調べる。そのためには，現在の月に作用するトルク（力のモーメント）を与える方程式を知ることが必要である。ここで，潮汐による海面のふくらみ分の質量が，地球表面２か所に質点（図４参照）を付け加えることに等しいと仮定する。θ を２か所の質点を結ぶ直線と，地球の中心と月の中心を結ぶ直線とがなす角とする。

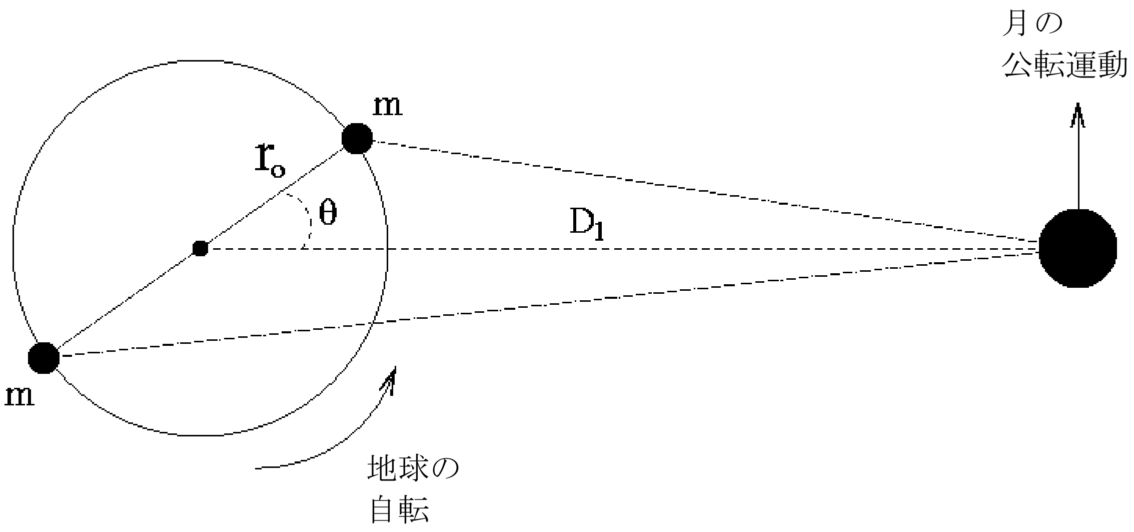


図４． 地球上のふくらみが月におよぼすトルクを試算するための模式図。図の縮尺は正確ではない。

3a	近いほうの質点から，月に対しておよぼす力の大きさ F_c を求めよ。	0.4

3b	遠いほうの質点から，月に対しておよぼす力の大きさ F_f を求めよ。	0.4

ここで，両質点により生じるトルクを試算することにする。

3c	近いほうの質点から，月に対して生じるトルクの大きさτ_cを求めよ。	0.4

3d	遠いほうの質点から，月に対して生じるトルクの大きさτ_fを求めよ。	0.4

3e	２つの質点により生じる合計のトルクの大きさτ を求めよ。ただし，$r_o << D_1$ なので，r_o / D_1の２乗以上の項は，１乗の項に比べたときは０として近似してよい。 また，$x<<1$のときには，$(1+x)^a \approx 1+ax$ としてよい。	1.0

3f	２つの質点による合計のトルクτ の数値を，$\theta = 3^\circ$ ，$m = 3.6 \times 10^{16}$ kg (この質量は地球の質量の10^{-8}倍であることに注意) であることを考慮して計算せよ。	0.5

トルクは角運動量の時間的変化の割合に等しいことから，現在の地球－月間の１年あたりの増加距離を求める。ここでは，月の角運動量をM_M，M_E，D_1，G のみを用いて表すものとする。

3g	現在の地球と月の間の１年あたりの増加距離を求めよ。	1.0

最後に，以下のように，１日が１年ごとにどれだけ長くなるか，試算する。

3h	年間の角速度ω_{E1}の減少および現在１年ごとの１日の長さがどれだけ長くなるかをそれぞれ求めよ。	1.0

4. エネルギーはどこに行くのか？

角運動量が保存されているのに対して，系の全エネルギー（角運動エネルギー＋万有引力による位置エネルギー）は保存されていない。この問題の終わりに，そのことを考えてみよう。

4a	地球・月系の現在における全エネルギー（角運動エネルギー＋万有引力による位置エネルギー）Eを表せ。ただし，I_E，ω_{E1}，M_M，M_E，D_1，Gのみを用いよ。	0.4

4b	全エネルギーEの変化ΔEを，D_1とω_{E1}変化量ΔD_1，$\Delta\omega_{E1}$の関数として書け。 また，１年あたりのΔEの数値を求めよ。ただし，ΔD_1，$\Delta\omega_{E1}$として，3g と 3h での結果を用いよ。	0.4

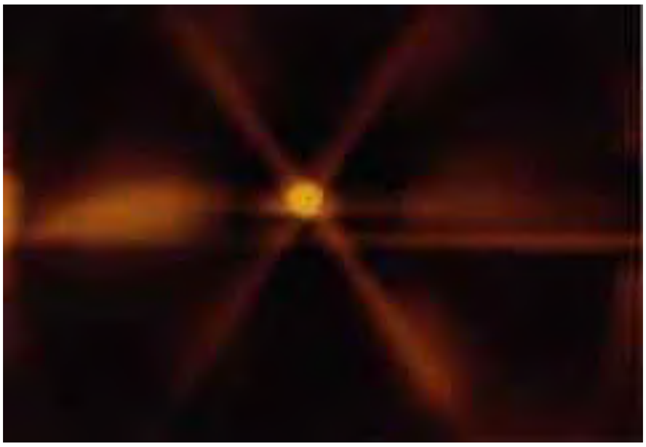
このエネルギー消失は，地球に対する月による潮汐のための発熱として，エネルギーが散逸したと見なしたものと一致することを示したい。ここで，潮汐による海面の盛り上がりを海水全体が平均 0.5 m もち上がると見なす。また，海水の層は$h=$ 0.5 m の深さで地球表面をおおっているとする（簡単のために全地球が海水におおわれていると見なす）。潮汐は１日に２回起こる。さらに，全海水が潮汐によってもち上がった分の重力による位置エネルギーの 10% が，海水が戻るときの粘性に対する発熱と見なすことにする。海水の密度は$\rho_{water}=10^3$ kg /m^3, a とし，地球表面上における重力加速度を$g=9.8$ m/s^{2}とせよ。

4c	この海水の層の全質量はいくらか。	0.2

4d	１年あたりのエネルギー散逸はいくらか。このエネルギー散逸は，地球・月系の現在の１年あたりのエネルギー消失と比較し，その大きさについて述べよ。	0.3

理論第 2 問
ドップラーレーザー冷却と光学的シロップ

本問の目的は、いわゆる「レーザー冷却」と「光学的シロップ」の現象を理解するための簡単な理論を展開することである。同じ振動数のレーザー光線を反対方向に照射することによって、典型的にはアルカリ金属のような中性原子のビームを冷却することに関わるものである。これは 1997 年チュウ（S. Chu），フィリップ（P. Phillip），コーヘンータノウジ（Cohen-Tannouji）のノーベル物理学賞受賞となった研究の一部である。



上の像は、対向するレーザー光線の３つの対が互いに直行して交わっているところに捕獲されたナトリウム原子を表している（中心部の明るい点）。捕獲部分は「光学的シロップ」と呼ばれる。なぜなら散逸的な光学的力は、シロップの中を運動する物体にかかる粘性抵抗力に似ているからである。

本問では，原子に入射する光子と原子の間の相互作用による基本的な現象と，一次元の散逸機構の基礎について解析する。

第 I 部:レーザー冷却の基礎

$+x$ 方向に速度 v で運動する質量 m の原子を考える。簡単化して問題を一次元とし，y，z 方向の運動を無視する（図１）。原子は二つのエネルギー準位をもつ。最低エネルギー状態のエネルギーは 0 であり，励起状態のエネルギーは $\hbar\omega_0$（$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$）である。原子ははじめ最低エネルギー状態にある。実験室系（実験室に固定された座標系）で振動数 ω_L のレーザー光線が $-x$ 方向を向いていて原子に入射したとする。量子力学的には、レーザー光は多数の光子からなり、それぞれエネルギー $\hbar\omega_L$ と運動量 $-\hbar q$ をもつ。光子が原子に吸収されるが，のちに自然に放射される。その放射は $+x$ 方向と $-x$ 方向に等確率で起こる。原子は非相対論的速さ v（$v/c \ll 1$: c は光速）で動いているので、v/c の一次の項まで考えることにする。また，$\hbar q/mv \ll 1$ であるとする。すなわち、原子の

運動量は１個の光子の運動量よりもずっと大きい。答を書くときは，これら二つの量，すなわち，v/c，$\hbar q/mv$ について一次の補正まで考える。

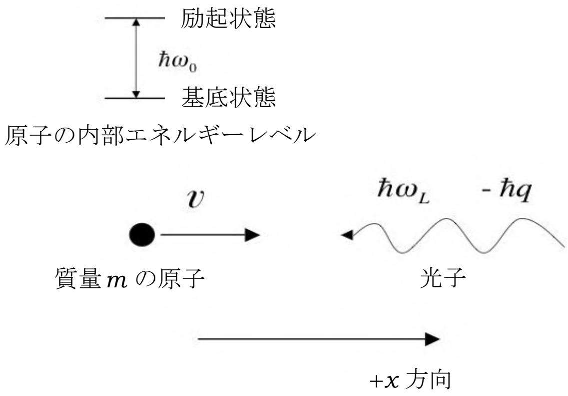


図１：$+x$ 方向へ速度 v で動いている質量 m の原子と，エネルギー $\hbar\omega_L$，運動量 $-\hbar q$ の光子の衝突を考える。原子は，内部にエネルギー差 $\hbar\omega_0$ の２つのエネルギー準位をもつ。

　適当な速度で動いている原子から見ると，レーザー光の角振動数 ω_L は原子のエネルギー遷移に必要な角振動数に一致する。
以下の問に答えよ。

1. 吸収

1a	光子吸収を起こすための角振動数に対する条件を書き下せ。	0.2

1b	実験室系で見て，光子吸収後の原子の運動量 p_{at} を書き下せ。	0.2

1c	実験室系で見て，光子吸収後の原子の全エネルギー（運動エネルギーと吸収エネルギーの和）ε_{at} を書き下せ。	0.2

2. $-x$ 方向への光子の自然放射

　照射された光子を吸収後，いくらか時間がたった後，原子が $-x$ 方向へ光子を放射するとする。

2a	実験室系で見て，$-x$ 方向へ放射された後，放射光子のエネルギー ε_{ph} を書き下せ。	0.2

2b	実験室系で見て，$-x$ 方向へ放射された後，放射光子の運動量 p_{ph} を書き下せ。	0.2

2c	実験室系で見て，$-x$ 方向へ放射された後，原子の運動量 p_{at} を書き下せ。	0.2

2d	実験室系で見て，$-x$ 方向へ放射された後，原子の運動エネルギー ε_{at} を書き下せ。	0.2

3. $+x$ **方向への光子の自然放射**

照射された光子を吸収後，いくらか時間がたった後，今度は原子が $+x$ 方向へ光子を放射するとする。

3a	実験室系で見て，$+x$ 方向へ放射された後，放射光子のエネルギー ε_{ph} を書き下せ。	0.2

3b	実験室系で見て，$+x$ 方向へ放射された後，放射光子の運動量 p_{ph} を書き下せ。	0.2

3c	実験室系で見て，$+x$ 方向へ放射された後，原子の運動量 p_{at} を書き下せ。	0.2

3d	実験室系で見て，$+x$ 方向へ放射された後，原子の運動エネルギー ε_{at} を書き下せ。	0.2

4. 吸収後の平均放射

$-x$ 方向と $+x$ 方向への光子の自然放射は同じ確率で起こる。このことを考慮して，以下の問に答えよ。

4a	放射過程の後，放射された光子のエネルギーの平均値ε_{ph}を書き下せ。	0.2

4b	放射過程の後，放射された光子の運動量の平均値 p_{ph} を書き下せ。	0.2

4c	放射過程の後，原子の運動エネルギーの平均値ε_{at}を書き下せ。	0.2

4d	放射過程の後，原子の平均運動量 p_{at} を書き下せ。	0.2

5. エネルギーと運動量の移動

上で述べたような一光子の吸収・放射過程だけを仮定すると、レーザー放射と原子の間には平均的に運動量とエネルギーの移動が存在する。

5a	一光子の吸収放出過程が完了したときの原子のエネルギー変化の平均値$\Delta\varepsilon$を書き下せ。	0.2

5b	一光子の吸収放射過程が完了したときの原子の運動量変化の平均値Δpを書き下せ。	0.2

6. レーザー光による$+x$方向へのエネルギーと運動量の移動

原子が$+x$方向に速度υで運動しているときに，その原子に対して，振動数ω_L'のレーザー光が$+x$方向に入射したとする。原子から見て，原子の内部でのエネルギー遷移とレーザー光の間に共鳴条件が成り立つとする。このとき、以下の問に答えよ。

6a	一光子の吸収放射過程が完了したときの原子のエネルギー変化の平均値$\Delta\varepsilon$を書き下せ。	0.3

6b	一光子の吸収放射過程が完了したときの原子の運動量変化の平均値Δpを書き下せ。	0.3

第II部:散逸と光学的シロップの原理

　量子論的過程には固有の不確定性がある。そのため，原子が入射光子を吸収した後，ある有限時間内に，自然に光子を放射(自然放射)する現象では、上に述べたように，不確定性関係が成り立つため，厳密に共鳴条件にしたがうわけではない。これは，レーザー光の角振動数ω_Lとω_L'がどんな値を取っても光の吸収・放射過程が起こり得ることを示している。これらの現象は、異なる量子力学的確率で起こる。予想されるように，実現確率が最大になるのは厳密な共鳴条件が成り立つときである。
平均的に，単一現象として吸収から放射までの時間は，原子が励起エネルギー状態に止まる時間，これを励起持続時間と言い，Γ^{-1}と表す。

　実験室系で，基底状態（最もエネルギーの低い状態）にある静止しているN個の原子に角振動数ω_Lのレーザー光を照射する。照射された原子は，フォトンの吸収・放射を繰り返し，平均的に，N_{exc}個の原子が励起状態にあり，$N-N_{exc}$個の原子が基底状態にある。量子力学的計算によると，N_{exc}は次のように表される。

$$N_{exc} = N\frac{\Omega_R^2}{(\omega_0-\omega_L)^2+\dfrac{\Gamma^2}{4}+2\Omega_R^2}$$

　ここで，ω_0は原子の共鳴角振動数，Ω_Rは，いわゆるラビ角振動数で，Ω_R^2はレーザー光の強度に比例する。前述したように，たとえ共鳴角振動数ω_0がレーザー光線の角振動数ω_Lと異なっていても，このN_{exc}はゼロではない。前の結果を別の言葉で言うと，単位時間内の吸収・放射過程の数は，$N_{exc}\Gamma$となる。

　図2に示している物理状況を考えよう。互いに逆向きに進む，同じ角振動数ω_Lのレーザー光(ω_L自体は任意)が同時に，$+x$方向に速度vで動いているガス状のN個の原子団に照射されるとする。

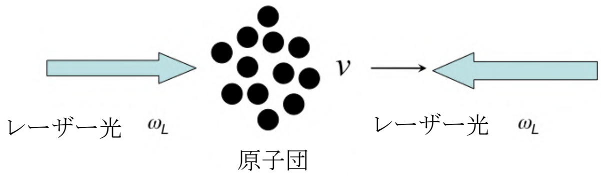


図2： x 軸上で向き合って進む同じ角振動数 ω_L のレーザー光が，$+x$ 方向に速度 v で動いているガス状の N 個の原子団に照射されている。

7. 動いている原子にレーザー光が与える力

7a	これまでの結果を参照して，$+x$ 方向に動いている原子団に 2 つの同じ角振動数 ω_L のレーザー光を，x 軸に沿って両側から照射したときに原子に与える力を求めよ。ただし，$mv >> \hbar q$ と仮定せよ。	1.5

8. 速度の小さい極限

原子の速度が十分小さいと仮定して、力を速度 v の一次の項まで展開する。.

8a	問 7a で得られた力を，速度の一次の項までで表せ。	1.5

この結果を用いると，レーザー光が原子を加速するか，減速するか，影響を与えないか，の条件を求めることができる。

8b	正の力（原子を加速する力）を与えるための条件を書き下せ。	0.25

8c	与える力がゼロとなる条件を書き下せ。	0.25

8d	負の力（原子を減速する力）を与える条件を書き下せ。	0.25

8e	原子が$-v$の速度で運動している（すなわち，$-x$方向に運動している）と仮定する。原子に減速する力が作用する条件を書き下せ。	0.25

9. 光学的シロップ

負の力が作用する場合，その力は，摩擦による散逸的なものとなる。初期条件として$t=0$のときに原子気体の速度v_0であったとする。

9a	速度が小さい極限で、レーザー光が時間τの間照射された後の原子の速度を求めよ。	1.5

9b	原子気体は温度T_0で熱平衡状態にあるとする。レーザー光が時間τの間照射された後の原子気体の温度Tを求めよ。	0.5

このモデルは，あまり低温になると成立しない。

理論第３問

なぜ恒星は大きいのか?

恒星は熱い気体からなる球である。その中心部分で水素を核融合させてヘリウムにすることによって輝いている。この問題においては，古典力学と量子力学の両方の概念を使うとともに静電気学と熱力学を用いて，恒星が核融合過程を実現するために十分の大きさがなければならない理由を理解し，水素の核融合反応を起こすための星の最小の質量と半径がどれほどかを導く。

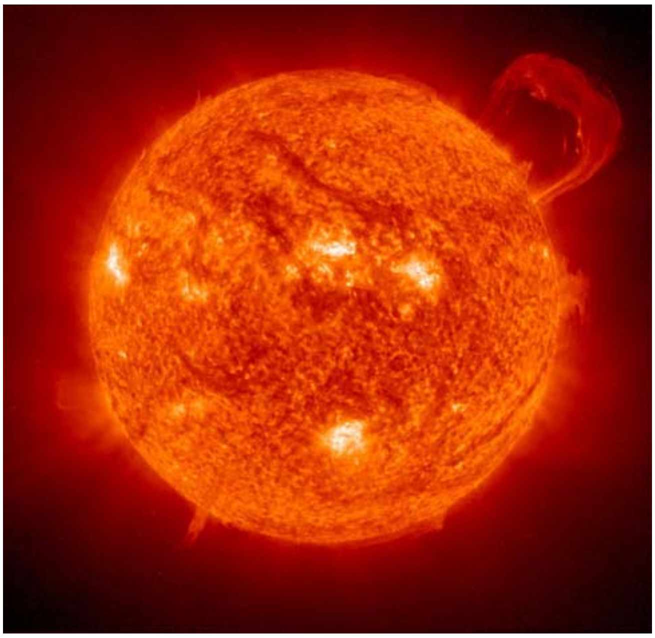


図１　大部分の星と同様に，太陽は，中心部分において水素をヘリウムに換える熱核融合反応の結果輝く。

用いることができる物理定数

万有引力定数　$G = 6.7\times10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$

ボルツマン定数　$k = 1.4\times10^{-23}\ \mathrm{J/K}$

プランク定数　$h = 6.6\times10^{-34}\ \mathrm{J\,s}$

陽子の質量　$m_p = 1.7\times10^{-27}\ \mathrm{kg}$

電子の質量　$m_e = 9.1\times10^{-31}\ \mathrm{kg}$

電気素量　$q = 1.6\times10^{-19}\ \mathrm{C}$

真空の誘電率　$\varepsilon_0 = 8.9\times10^{-12}\ \mathrm{C^2/Nm^2}$

太陽半径　$R_S = 7.0\times10^{8}\ \mathrm{m}$

太陽質量　$M_S = 2.0\times10^{30}\ \mathrm{kg}$

1. 恒星の中心における温度の古典論による評価

恒星を形成する気体は完全にイオン化した水素（すなわち，電子と陽子が同数）であり，理想気体のようにふるまうと仮定しよう。古典力学の視点から，２つの陽子を融合させるには，引力である短距離の核力が効いてくるために 10^{-15} m くらいまで近づかねばならない。しかしながら，そこまで近づくためにはまずクーロン力による反発を乗り越えなければならない。古典論的に考えることにして，点電荷とみなせる２個の陽子が速度 v_{rms} で反対方向に運動して，１次元的に正面衝突すると仮定しよう。ここで，v_{rms} は陽子の２乗平均速度である。

1a	２つの陽子の間の最小の距離 d_c が 10^{-15} m となるときの気体の温度 T_c は絶対温度で何度であるべきか答えよ。この温度の表式を記した上で，数値を有効数字２桁の精度で求めよ。	1.5

2. 前問で求めた温度の評価が誤りであることを示す

前問で求めた温度が正しいかどうかを検証するためには，恒星の中心の温度を評価する別の独立の方法が必要である。星の構造は，大変複雑であるが，いくつかの仮定をすることによって有効な理解をすることができる。星は平衡状態にあるとする。すなわち，内に向かう重力と外に向かう圧力がつり合っている(図２参照) 。星の中心から距離 r と $r+\Delta r$ にはさまれる薄皮をなす気体部分に対して，静止圧の平衡条件は,

$$\frac{\Delta P}{\Delta r} = -\frac{G M_r \rho_r}{r^2},$$

ここで P は気体の圧力，G は万有引力定数，M_r は半径 r の球内にある星の部分の質量，ρ_r はこの薄皮部分における気体の密度である。

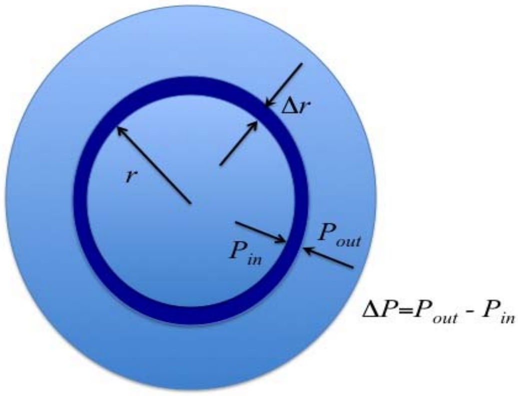


図 2. 恒星は圧力差と重力がつり合っている静止圧平衡にある。

星の中心温度のオーダーの評価は，以下のような近似をして，星の中心と表面におけるパラメータの値から得られる。

$\Delta P \approx P_o - P_c$,

ここで P_c と P_o は，それぞれ中心と表面における圧力である。$P_c >> P_o$ であるから

$\Delta P \approx -P_c$.

と仮定することができる。すると，同様の大雑把な近似として，

$\Delta r \approx R$,

と書くことができる。ここで，R は星の半径である。また

$M_r \approx M_R = M$,

と書くことができる。ここで M は星の全質量である。密度は中心における値で近似する。

$\rho_r \approx \rho_c$

圧力は理想気体の圧力であると仮定することができる。

2a	中心における温度 T_c を，星の半径 R と質量 M と冒頭の物理定数だけを用いた表式を書け。	0.5

このモデルが正当であるかどうかは，次に挙げる予想から，判定できる。

2b	(2a) で得られた式を用いて予想される，星の M/R の比を，物理定数と T_c だけを用いて書け。	0.5

2c	(1a)で導かれた T_c の値を用いて予想される，星の比 M/R の数値を有効数字２桁の精度で求めよ。	0.5

2d	比 $M(Sun)/R(Sun)$ を有効数字２桁の精度で計算し，その値が(2c)で得られた値よりも非常に小さいことを示せ。	0.5

3. 恒星の中心における温度の量子力学的評価

(2d)で得られた M/R の大きな相違から，(1a)で得られた T_c の古典力学的評価は正しくないことが示唆される。この相違は，量子力学的効果を考えれば説明される。量子力学によれば，陽子は波動性を持ち，１個の陽子はド・ブロイ波長 λ_p の大きさでぼやけた存在となる。したがって，陽子間の最近接距離 d_c が λ_p と同じ大きさになると，陽子は量子力学の意味で重なり合い核融合を起こすことが可能になる。

3a	２乗平均速度 υ_{rms} を持つ陽子に対し， $d_c = \dfrac{\lambda_p}{2^{1/2}}$ が核融合が起こるための条件であると仮定して，冒頭の物理定数のみを用いて， T_c の表式を求めよ。	1.0

3b	(3a)で得られた T_c の数値を有効数字２桁の精度で求めよ。	0.5

3c	(3b)で導かれた T_c の値を用い，(2b)で導かれた公式を用いて，予想される星の M/R の数値を有効数字２桁の精度で求めよ。この値が， $M(Sun)/R(Sun)$ の観測値に極めて近いことを確かめよ。	0.5

確かに，いわゆる「主系列」に属する星（水素の核融合をおこなっている恒星）は質量の広い領域においてこの比に従っている。

4. 恒星の質量／半径比

前記に見た理論と観測の一致から，太陽の中心における温度を量子力学的に評価することは正しいことが分かる。

4a	水素の核融合を起こしている星はすべて質量Mと半径Rの比が同じであり，物理定数にのみ依存していることを示すために，前問で得た結果を用いよ。実際に，水素の核融合を行っている星に対して，M/Rの表式を求めよ。	0.5

5. 最小の恒星の質量と半径

4a の結果から，そのような関係を充たせば，いかなる質量の星も実在できることになるが，これは事実ではない。ここでは一般的な，水素で構成される星について取り扱う。通常恒星内の核融合する水素ガスはほとんど理想気体として振舞うことが知られている。これは，典型的電子間距離d_eが平均して電子のド・ブロイ波長λ_eよりも長いことを意味する。もし近くなれば，電子はいわゆる取り込まれた状態となり，その星は異なるふるまいをする。星内部の陽子と電子を扱う時の区別に注意せよ。陽子については，陽子が星内で核融合するためには，そのド・ブロイ波は密に重なっており，一方，電子について，電子を理想気体と近似するためには，そのド・ブロイ波は重なってはならない。

星の密度は半径が増大するに従い，減少する。それにもかかわらず，大雑把な試算では星の密度は一定であるとしている。以下では，$m_p >> m_e$と扱ってよい。

5a	星内部での単位体積当たりの平均的電子数n_eを求める式を表せ。	0.5

5b	上記式より星内部での平均的電子間距離d_eを示す式を表せ。	0.5

5c	$d_e \geq \frac{\lambda_e}{2^{1/2}}$の条件を用いて，通常の星について，これまでの式を用いて最小の半径を求める式を表せ。ここで星の典型的温度は，星中心における温度とせよ。	1.5

5d	上記最小半径の式を有効数字２桁の精度で数値計算し，単位としてメートルと太陽半径の何倍であるかの両方で答えよ。	0.5

5e	上記半径を用いて，通常の星の最小質量を有効数字２桁の精度で kg 単位と太陽質量の何倍であるかの両方で答えよ。	0.5

6. 老いた恒星内のヘリウムの核融合

恒星が時間を経てくると，星内部コアの核融合した水素の大部分はヘリウム(He)になり，それらの星はさらにヘリウムを融合させ，より重い元素へと変わり，輝き続ける。ヘリウム原子核は二つの陽子と二つの中性子を持つ。そのため，ヘリウム原子核は陽子に対して，電荷が 2 倍，質量は約 4 倍である。これまで，われわれは $d_c = \dfrac{\lambda_p}{2^{1/2}}$ という条件で陽子が核融合することを参考にせよ。

6a	ヘリウム原子核の平衡条件を決め，ヘリウムの２乗平均速度 $v_{rms}(He)$，ヘリウムが核融合するために必要な最低の温度 $T(He)$ を有効数字２桁の精度で求めよ。	0.5

答案用紙

理論問題 No. 1

地球−月系の時間発展

1. 角運動量保存則**.**

1a		0.2

1b		0.2

1c		0.3

2. 地球と月の最終的な距離と最終的な角速度**.**

2a		0.2

2b		0.5

2c		0.5

2d		0.5

2e		0.2

2f		0.2

2g		0.3

2h		0.3

2i		0.2

3. 月は 1 年間にどれだけ遠ざかるか？

3a		0.4

3b		0.4

3c		0.4

3d		0.4

3e		1.0

3f		0.5

3g		1.0

3h		1.0

4. エネルギーはどこに行くのか？

4a		0.4

4b		0.4

4c		0.2

4d		0.3

白紙

答案用紙

理論第 2 問

ドップラーレーザー冷却と光学的シロップ

第 I 部: レーザー冷却の基礎

1. 吸収**.**

1a		0.2

1b		0.2

1c		0.2

2. $-x$ 方向への光子の自然放射**.**

2a		0.2

2b		0.2

2c		0.2

2d		0.2

3. $+x$ 方向への光子の自然放射**.**

3a		0.2

3b		0.2

3c		0.2

3d		0.2

4. 吸収後の平均放射**.**

4a		0.2

4b		0.2

4c		0.2

4d		0.2

5. エネルギーと運動量の移動**.**

5a		0.2

5b		0.2

6. レーザー光による $+x$ 方向へのエネルギーと運動量の移動**.**

6a		0.3

6b		0.3

第II部: 散逸と光学的シロップの原理

7. レーザー光による動いている原子に加わる力**.**

7a		1.5

8. 速度の小さい極限**.**

8a		1.5

8b		0.25

8c		0.25

8d		0.25

8e		0.25

9. 光学的シロップ

9a		1.5

9b		0.5

白紙

解答用紙

理論問題 No. 3

なぜ星は大きいか**?**

1) まず、星の中心における温度の古典力学的評価.

1a		1.5

2) 前問の温度の評価が誤りであることを見つけること.

2a		0.5

2b		0.5

2c		0.5

2d		0.5

3) 星の中心における温度の量子力学的評価

3a		1.0

3b		0.5

3c		0.5

4) 星の質量/半径の比.

4a		0.5

5) 最小の星の質量/半径の比.

5a		0.5

5b		0.5

5c		1.5

5d		0.5

5e		0.5

6) 古い星におけるヘリウム核の融合.

6a		0.5

Blank Sheet