理論第一問　　　　　　　　　　　　　　　【解答】

1.角運動量保存則

1a　角運動量の定義より、

$$L_1 = I_E\omega_{E1} + I_{M1}\omega_{M1}$$

1b　角運動量の定義より、

$$L_2 = I_E\omega_2 + I_{M2}\omega_2$$

1c　与えられた近似のもとで、

$$I_E\omega_{E1} + I_{M1}\omega_{M1} = I_{M2}\omega_2 = L_1$$

2.地球と月の最終的な距離と最終的な角速度

2a　月についての円運動の力のつり合いより、

$$\frac{GM_EM_M}{D_2^2} = M_MD_2\omega_2^2$$

よって、

$$\omega_2^2D_2^3 = GM_E$$

2b　円運動している時の、月の慣性モーメントは、

$$I_{M2} = M_MD_2^2$$

なので、1c より、

$$\omega_2 = \frac{L_1}{M_MD_2^2}$$

これを、2a の式に代入して、

$$D_2 = \frac{L_1^2}{GM_EM_M^2}$$

2c　2b より、

$$\omega_2 = \frac{L_1}{M_M} \times \frac{G^2M_E^2M_M^4}{L_1^4} = \frac{G^2M_E^2M_M^3}{L_1^3}$$

2d　地球の慣性モーメントは、半径 r_0 密度 ρ_0 の球の慣性モーメントと、半径 r_i 密度 $\rho_i - \rho_0$の球の慣性モーメントの和であるから、

$$I_E = \frac{2}{5}\frac{4\pi}{3}\left[r_0^5\rho_0 + r_i^5(\rho_i - \rho_0)\right]$$

2e　2d より、

$$I_E = \frac{2}{5}\frac{4\pi}{3}\left[r_0^5\rho_0 + r_i^5(\rho_i - \rho_0)\right] = 8.0 \times 10^{37}\ \mathrm{kg\ m^2}$$

2f　1a より、

$$L_1 = I_E\omega_{E1} + I_{M1}\omega_{M1} = 3.4 \times 10^{34}\ \mathrm{kgm^2s^{-1}}$$

2g　2b より、

$$D_2 = 5.4 \times 10^8\ \mathrm{m}$$

また、これは$\mathrm{D_2 = 1.4D_1}$

2h　2c より、

$$\omega_2 = 1.6 \times 10^{-6}\ \mathrm{s^{-1}}$$

これは、４６日で１周する角速度である。

2i　地球の最終的な自転角運動量は　$I_E\omega_2 = 1.3 \times 10^{32}\ \mathrm{kg\ m^2s^{-1}}$　であり、月の最終的な公転角運動量は　$I_{M2}\omega_2 = 3.4 \times 10^{34}\ \mathrm{kg\ m^2s^{-1}}$　である。よって、最終的な地球の自転角運動量は月の公転角運動量の 1/260 倍となり、この近似が正当化されることがわかる。

3.　月は１年間にどれだけ遠ざかるか？

3a　余弦定理より、月に近い方の質点から、月が受ける力の大きさは

$$F_c = \frac{GmM_M}{D_1^2 + r_0^2 - 2D_1r_0\cos\theta}$$

3b　同様に月から遠い方の質点から、月が受ける力の大きさは

$$F_f = \frac{GmM_M}{D_1^2 + r_0^2 + 2D_1r_0\cos\theta}$$

3c　　地球の中心から月に近い質点に向かうベクトルと $\vec{F_c}$ のなす角をφとすると、正弦定理より、

$$\sin\varphi = D_1(D_1^2 + r_0^2 - 2D_1 r_0\cos\theta)^{-\frac{1}{2}}\sin\theta$$

よって,トルクは

$$\tau_c = F_c r_0 \cos\varphi = F_c r_0 \sin\varphi$$
$$= \frac{GmM_M r_0 D_1 \sin\theta}{(D_1^2 + r_0^2 - 2D_1 r_0\cos\theta)^{3/2}}$$

3d 同様に

$$\tau_f = \frac{GmM_M r_0 D_1 \sin\theta}{(D_1^2 + r_0^2 + 2D_1 r_0\cos\theta)^{3/2}}$$

3e τ_cとτ_fについて、与えられた近似より、

$$\frac{GmM_M r_0 D_1 \sin\theta}{(D_1^2 + r_0^2 \pm 2D_1 r_0\cos\theta)^{3/2}} \approx \frac{GmM_M r_0 \sin\theta}{D_1^2\left(1 \pm \frac{2r_0\cos\theta}{D_1}\right)^{3/2}} \approx \frac{GmM_M r_0 \sin\theta}{D_1^2}\left(1 \mp \frac{3r_0\cos\theta}{D_1}\right)$$

よって、反時計回りのトルクを正として、

$$\tau = \tau_c - \tau_f = \frac{GmM_M r_0 \sin\theta}{D_1^2}\left(1 + \frac{3r_0\cos\theta}{D_1} - 1 + \frac{3r_0\cos\theta}{D_1}\right) = \frac{6GmM_M r_0^2 \sin\theta\cos\theta}{D_1^3}$$

3f

$$\tau = \frac{6GmM_M r_0^2 \sin\theta\cos\theta}{D_1^3} = 4.1\times 10^{16}\mathrm{Nm}$$

3g

$\omega_{M1}^2 D_1^3 = GM_E$より、月の角運動量は

$$I_{M1}\omega_{M1} = M_M D_1^2\left(\frac{GM_E}{D_1^3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= M_M(GM_E D_1)^{\frac{1}{2}}$$

トルクは、角運動量の単位時間あたりの変化量なので、上の式で月の角運動量が変数D_1のみに依存すると考えると、下のように表せる。

$$\tau = \frac{M_M (GM_E)^{1/2}}{2D_1^{1/2}} \frac{\Delta D_1}{\Delta t}$$

$$\Delta D_1 = \frac{2\tau}{M_M}\left(\frac{D_1}{GM_E}\right)^{\frac{1}{2}} \Delta t$$

$\Delta t = 3.1\times 10^7 s = 1\,year$を代入して、

月地球間距離の1年間の増加は

$$\Delta D_1 = 0.034\text{m}$$

3h 回転運動方程式 $I_E \frac{\Delta\omega_{E1}}{\Delta t} = -\tau$より、

$$\Delta\omega_{E1} = -\frac{\tau\Delta t}{I_E}$$

よって、$\Delta\omega_{E1} = -1.6\times 10^{-14}\text{s}^{-1}$

P_Eを地球の自転周期とすると，

$$P_E\omega_{E1} = 2\pi$$

$$(P_E + \varDelta P_E)(\omega_{E1} + \varDelta\omega_{E1}) = 2\pi$$

より、

$$\frac{\varDelta P_E}{P_E} + \frac{\varDelta\omega_{E1}}{\omega_{E1}} = 0 \quad \therefore \quad \frac{\varDelta P_E}{P_E} = -\frac{\varDelta\omega_{E1}}{\omega_{E1}}$$

$P_E = 1day = 8.64\times 10^4\text{s}$より、自転周期の1年間での伸びは

$$\Delta P_E = 1.9\times 10^{-5}\text{s}$$

4.エネルギーはどこに行くのか?

4a 現在のエネルギーの総和(回転エネルギーと重力エネルギーの和)は

$$E = \frac{1}{2}I_E\omega_{E1}^2 + \frac{1}{2}I_M\omega_{M1}^2 - \frac{GM_EM_M}{D_1}$$

2a で得た $\omega_{M1}^2 D_1^3 = GM_E$ と $I_M = M_M D_1^2$ を使うと

$$E = \frac{1}{2}I_E\omega_{E1}^2 - \frac{1}{2}\frac{GM_EM_M}{D_1}$$

4b　Eの変化 ΔE は

$$\Delta E = \frac{\partial E}{\partial \omega_{E1}} \Delta\omega_{E1} + \frac{\partial E}{\partial D_1} \Delta D_1 = I_E \omega_{E1} \Delta\omega_{E1} + \frac{1}{2} \frac{G M_E M_M}{D_1^2} \Delta D_1$$

3g と 3h で得た $\Delta\omega_{E1}$ と ΔD_1 を使うと

$$\Delta E = -9.0 \times 10^{19}\ \mathrm{J}$$

4c　海水の層の体積は $4\pi r_o^2 \times h$ なので全質量を M_{water} とすると

$$M_{water} = 4\pi r_o^2 \times h \times \rho_{water} = 2.6 \times 10^{17}\ \mathrm{kg}$$

4d　潮汐により、全海水が持ち上がったときの重力による位置エネルギーの変化は $M_{water} \times g \times 0.5\ \mathrm{J}$ であり、その 10%が熱として散逸する。潮汐は一年間で 365×2 回起こるので、エネルギー散逸は

$$-M_{water} \times g \times 0.5 \times 0.1 \times 365 \times 2 = -9.3 \times 10^{19}\ \mathrm{J}$$

これは、地球・月系の現在の 1 年あたりのエネルギー消失 ΔE とほぼ等しい。

理論第２問　　〔解答〕

第１部：レーザー冷却の基礎

1

(1-a) 原子の静止系での光の振動数 ω は,

$$\omega = \omega_L \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}$$

となる. これが $\omega_{\boldsymbol{0}}$ に等しいときに光子吸収を起こす. $v/c << 1$ より

$$\omega_{\boldsymbol{0}} \simeq \omega_L \left(1+\frac{v}{c}\right)$$

が求める条件である.

(1-b) 実験室系で見たときの光子の運動量は

$$-\hbar\omega_{\boldsymbol{0}}/c \simeq -\frac{\hbar\omega_L}{c}\left(1+\frac{v}{c}\right)$$

だから，運動量保存則より光子吸収後の原子の運動量 p_{at} は

$$\begin{aligned} p_{at} &\simeq mv - \frac{\hbar\omega_L}{c}\left(1+\frac{v}{c}\right) \\ &\simeq mv - \frac{\hbar\omega_L}{c} \end{aligned}$$

である.

(1-c)　エネルギー保存則より

$$\varepsilon_{at} = \frac{1}{2}mv^2 + \hbar\omega_{\boldsymbol{0}} \simeq \frac{1}{2}mv^2 + \hbar\omega_L$$

となる.

2

(2-a) 光子吸収後の原子の速さ v' は，原子の運動量が mv' だから

$$v' = v - \frac{\hbar q}{m}$$

である. よって，放射光のエネルギーは重心系で見たときに $\hbar\omega_{\boldsymbol{0}}$ であることに注意すると, ドップラー効果により

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ph} &= \hbar\omega_{\boldsymbol{0}}\left(1-\frac{v'}{c}\right) \\ &= \hbar\omega_L\left(1+\frac{v}{c}\right)\left(1-\frac{v}{c}+\frac{\hbar q}{mc}\right) \end{aligned}$$

となる. ここで，$\hbar q/mc$ は

$$\frac{\hbar q}{mc} = \frac{\hbar q}{mv}\frac{v}{c}$$

となり，今の近時の下では 2 次の微小量だから無視できる. ゆえに,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ph} &\simeq \hbar\omega_L\left(1+\frac{v}{c}\right)\left(1-\frac{v}{c}\right) \\ &= \hbar\omega_L\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \\ &\simeq \hbar\omega_L \end{aligned}$$

を得る.

(2-b) 放射光子の運動量は

$$p_{ph} = -\varepsilon_{ph}/c \simeq -\hbar\omega_L/c$$

である.

(2-c) 原子の運動量は，運動量保存則より，

$$p_{at} = mv' - p_{ph} \simeq mv$$

となる.

(2-d) 原子の運動エネルギーは

$$\varepsilon_{at} = \frac{p_{at}^2}{2m} \simeq \frac{mv^2}{2}$$

となる.

$\boxed{\mathbf{3}}$

(3-a) (2-a) で考えたドップラー効果の式で v' の符号を反転させればよい. ここでも，$\frac{\hbar q}{mc}$ の項は無視できるから，放射光子のエネルギーは次のようになる:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ph} &\simeq \hbar\omega_{\boldsymbol{o}}\left(1+\frac{v}{c}\right)\\ &= \hbar\omega_L\left(1+\frac{v}{c}\right)^2\\ &\simeq \hbar\omega_L\left(1+\frac{2v}{c}\right)\end{aligned}$$

(3-b) 放射光子の運動量 p_{ph} は,

$$p_{ph} = \frac{\varepsilon_{ph}}{c} \simeq \frac{\hbar\omega_L}{c}\left(1+\frac{2v}{c}\right)$$

である.

(3-c) 原子の運動量 p_{at} は，運動量保存則から,

$$\begin{aligned}p_{at} &= mv' - p_{ph}\\ &= mv - \frac{\hbar\omega_L}{c} - \frac{\hbar\omega_L}{c}\left(1+\frac{2v}{c}\right)\\ &\simeq mv - \frac{2\hbar\omega_L}{c}\end{aligned}$$

となる.

(3-d)　原子の運動エネルギーは，$q = \omega_L/c$ より

$$\begin{aligned}\varepsilon_{at} &= \frac{p_{at}^2}{2m}\\ &\simeq \frac{1}{2m}(mv-2\hbar q)^2\\ &\simeq \frac{mv^2}{2}\left(1-\frac{4\hbar q}{mv}\right)\end{aligned}$$

となる.

$\boxed{\mathbf{4}}$

(4-a) $+x$ 方向に放射される確率と $-x$ 方向に放射される確率は等しいので, 光子のエネルギーの平均値は

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ph} &\simeq \frac{1}{2}\left[\hbar\omega_L + \hbar\omega_L\left(1+\frac{2v}{c}\right)\right]\\ &= \hbar\omega_L\left(1+\frac{v}{c}\right)\end{aligned}$$

である.

(4-b) 放射過程後の光子の平均運動量は,

$$\begin{aligned} p_{ph} &\simeq \frac{1}{2}\left(-\frac{\hbar\omega_L}{c}+\frac{\hbar\omega_L}{c}\left(1+\frac{2v}{c}\right)\right) \\ &= \frac{\hbar\omega_L}{c}\frac{v}{c} \end{aligned}$$

となる．これは二次の微小量なので,$p_{ph} \simeq 0$ となる.

(4-c) 原子の運動エネルギーの平均値は,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{at} &\simeq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}mv^2\left(1-4\frac{\hbar\omega_L}{mvc}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}mv^2\left(1-\frac{2\hbar\omega_L/c}{mv}\right) \end{aligned}$$

である.

(4-d) 原子の平均運動量は,

$$\begin{aligned} p_{at} &\simeq \frac{1}{2}\left[mv+\left(mv-\frac{2\hbar\omega_L}{c}\right)\right] \\ &\simeq mv-\frac{\hbar\omega_L}{c} \end{aligned}$$

となる.

5

(5-a) 原子のエネルギー変化の平均値は,

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon &\simeq \frac{1}{2}mv^2\left(1-\frac{2\hbar\omega_L/c}{mv}\right)-\frac{1}{2}mv^2 \\ &= -\hbar\omega_L\frac{v}{c} \end{aligned}$$

である.

(5-b) 原子の運動量変化の平均値は,

$$\begin{aligned} \Delta p &= \left(mv-\frac{\hbar\omega_L}{c}\right)-mv \\ &= -\frac{\hbar\omega_L}{c} \end{aligned}$$

となる.

6

(6-a) 光子の入射方向と原子の運動の方向が等しいので, 原子のエネルギー変化の平均値は,

$$\Delta\varepsilon \simeq \hbar\omega'_L\frac{v}{c}$$

となる.

(6-b) 運動量変化の平均値は,

$$\Delta p = \frac{\hbar\omega'_L}{c}$$

となる.

第 2 部:散逸と光学的シロップの原理

$\boxed{7}$

(7-a) 原子が静止している系で考える. 単位時間当たりの吸収放射過程の数は $N_{exc}\Gamma$ である. 光子の入射してくる向きで振動数のドップラー効果による影響が異なることに注意して, 原子に働く力 F は,

$$F = \frac{\hbar\omega_L}{c}\Gamma N\left(\frac{\Omega_R^2}{\left(\omega_{\boldsymbol{O}}-\omega_L\left(1-\frac{v}{c}\right)\right)^2+\frac{\Gamma^2}{4}+2\Omega_R^2}-\frac{\Omega_R^2}{\left(\omega_{\boldsymbol{O}}-\omega_L\left(1+\frac{v}{c}\right)\right)^2+\frac{\Gamma^2}{4}+2\Omega_R^2}\right)$$

となる.

$\boxed{8}$

(8-a) 問題 7 で得られた結果を v について一次までの近似で展開する.

$$\begin{aligned} F &\simeq \frac{\hbar\omega_L}{c}\Gamma N\left(\frac{\Omega_R^2}{(\omega_{\boldsymbol{O}}-\omega_L)^2+\frac{\Gamma^2}{4}+2\Omega_R^2+2(\omega_{\boldsymbol{O}}-\omega_L)\omega_L\frac{v}{c}}-\frac{\Omega_R^2}{(\omega_{\boldsymbol{O}}-\omega_L)^2+\frac{\Gamma^2}{4}+2\Omega_R^2-2(\omega_{\boldsymbol{O}}-\omega_L)\omega_L\frac{v}{c}}\right) \\ &\simeq -\frac{4\hbar(\omega_L/c)^2\Gamma N\Omega_R^2}{\left((\omega_{\boldsymbol{O}}-\omega_L)^2+\frac{\Gamma^2}{4}+2\Omega_R^2\right)^2}(\omega_{\boldsymbol{O}}-\omega_L)v \end{aligned}$$

(8-b) $F > 0$ となればよいので, 求める条件は,

$$\omega_{\boldsymbol{O}} < \omega_L$$

である.

(8-c) $F = 0$ となればよいので,

$$\omega_{\boldsymbol{O}} = \omega_L$$

である.

(8-d) $F < 0$ となればよいので,

$$\omega_{\boldsymbol{O}} > \omega_L$$

である.

(8-e) 上の考察では, 光の入射の仕方は実験室系において左右対称なので周波数に対する条件は原子の運動の向きに寄らない. したがって, 原子を冷却するための条件は

$$\omega_{\boldsymbol{O}} > \omega_L$$

である.

$\boxed{9}$

(9-a) 原子について運動方程式を立てると,

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{4\hbar(\omega_L/c)^2\Gamma N\Omega_R^2}{\left((\omega_{\boldsymbol{O}}-\omega_L)^2+\frac{\Gamma^2}{4}+2\Omega_R^2\right)^2}(\omega_{\boldsymbol{O}}-\omega_L)v$$

である. これを,$v(t=0)=v_{\boldsymbol{O}}$ の条件下でとくと,

$$v(\tau) = v_{\boldsymbol{O}}\exp\left[-\frac{1}{m}\frac{4\hbar(\omega_L/c)^2\Gamma N\Omega_R^2}{\left((\omega_{\boldsymbol{O}}-\omega_L)^2+\frac{\Gamma^2}{4}+2\Omega_R^2\right)^2}(\omega_{\boldsymbol{O}}-\omega_L)\tau\right]$$

となる.

(9-b) 原子気体の内部エネルギーは運動エネルギーのみであると近似をすると, 古典統計力学の結果より

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT$$

となる. つまり,$T \propto v^2$ より,

$$T = T_{\boldsymbol{O}}\exp\left[-\frac{2}{m}\frac{4\hbar(\omega_L/c)^2\Gamma N\Omega_R^2}{\left((\omega_{\boldsymbol{O}}-\omega_L)^2+\frac{\Gamma^2}{4}+2\Omega_R^2\right)^2}(\omega_{\boldsymbol{O}}-\omega_L)\tau\right]$$

解答

理論問題 No.3

なぜ星は大きいか？

1 まず、星の中心における温度の古典力学的評価

1a(1.5)

2 個の陽子が持つ運動エネルギーの和が、最接近した時の静電エネルギーに等しいので、

$$2\left(\frac{1}{2}m_p v_{rms}^2\right) = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d_c} \tag{1}$$

また、陽子は理想気体のように振る舞うと仮定しているので、

$$\frac{3}{2}kT_c = \frac{1}{2}m_p v_{rms}^2 \tag{2}$$

よって両式から v_{rms} を消去して次式を得る。

$$T_c = \frac{q^2}{12\pi\varepsilon_0 d_c k} = 5.5\times 10^9\,\mathrm{K} \tag{3}$$

2 前問の温度の評価が誤りであることを見つけること

2a(0.5)

与式 $\Delta P/\Delta r = -GM_r\rho_r/r^2$ と、与えられた近似より、次式を得る。

$$P_c = \frac{GM\rho_c}{R} \tag{4}$$

次に、星の中心部で理想気体の状態方程式から P_c を求める。体積 V 中に含まれる陽子数を N_p とすると、ボルツマン係数 k を用いて次のように書ける。

$$P_c = \frac{2N_p kT_c}{V} \tag{5}$$

ただし、同数の陽子と電子が圧力に対して同等に寄与しているため、係数 2 がつく。電子の質量を無視しているので、一陽子当たりの体積 $V/N_p = m_p/\rho_c$ であるから、

$$P_c = \frac{2\rho_c kT_c}{m_p} \tag{6}$$

P_c の 2 表式 (4)(6) から、次の T_c の表式を得る。

$$T_c = \frac{GMm_p}{2kR} \tag{7}$$

2b(0.5)

2a の結果 (7) より、次式を得る。

$$\frac{M}{R} = \frac{2kT_c}{Gm_p} \tag{8}$$

2c(0.5)

2b の結果 (8) に、定数の値と 1a の結果 (3) を代入して、次の値を得る。

$$\frac{M}{R} = \frac{2 \times 1.4 \times 10^{-23} \times 5.5 \times 10^{9}}{6.7 \times 10^{-11} \times 1.7 \times 10^{-27}}\,\mathrm{kg/m} = 1.4 \times 10^{24}\,\mathrm{kg/m} \tag{9}$$

2d(0.5)

与えられた太陽の質量と半径から、次の値を得る。

$$\frac{M(Sun)}{R(Sun)} = \frac{2.0 \times 10^{30}}{7.0 \times 10^{8}}\,\mathrm{kg/m} = 2.9 \times 10^{21}\,\mathrm{kg/m} \tag{10}$$

この値は 2c の結果より 3 桁小さい。

3　星の中心における温度の量子力学的評価

3a(1.0)

ド・ブロイ波長 λ_p は、次式で与えられる。

$$\lambda_p = \frac{h}{m_p v_{rms}} \tag{11}$$

これと、(2) 式 $3kT_c/2 = m_p v_{rms}^2/2$、(3) 式 $T_c = q^2/12\pi\varepsilon_0 d_c k$、および $d_c = \lambda_p/2^(1/2)$ から、次式を得る。

$$T_c = \frac{q^4 m_p}{24\pi^2 \varepsilon_0^2 k h^2} \tag{12}$$

3b(0.5)

3a の結果 (12) に、与えられた定数の値を代入して、次の値を得る。

$$T_c = \frac{(1.6 \times 10^{-19})^4 \times 1.7 \times 10^{-27}}{24 \times 3.14^2 \times (8.9 \times 10^{-12})^2 \times 1.4 \times 10^{-23} \times (6.6 \times 10^{-34})^2}\,\mathrm{K} = 9.7 \times 10^{6}\,\mathrm{K} \tag{13}$$

3c(0.5)

2b の結果 (8) に、定数の値と 3b の結果 (13) を代入して、次の値を得る。

$$\frac{M}{R} = \frac{2 \times 1.4 \times 10^{-23} \times 9.7 \times 10^{6}}{6.7 \times 10^{-11} \times 1.7 \times 10^{-27}}\,\mathrm{kg/m} = 2.4 \times 10^{21}\,\mathrm{kg/m} \tag{14}$$

これは 2b で得た $M(Sun)/R(Sun)$ の観測値 $2.9 \times 10^{21}\,\mathrm{kg/m}$ に極めて近い。

4 星の質量/半径の比

4a(0.5)

(8) 式 $M/R = 2kT_c/Gm_p$ に、(12) 式 $T_c = q^4 m_p/24\pi^2\varepsilon_0^2 Gh^2$ を代入して、次式を得る。

$$\frac{M}{R} = \frac{q^4}{12\pi^2\varepsilon_0^2 Gh^2} \tag{15}$$

5 最小の星の半径/質量の比

5a(0.5)

星内部での単位体積当たりの陽子数を n_p とすると、$n_e = n_p$ である。ここで、$m_p >> m_e$ より電子の質量を無視すると、次式を得る。

$$n_e = n_p = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3 m_p} \tag{16}$$

5b(0.5)

5a の結果 (16) を用いて、次式を得る。

$$d_e = n^{-1/3} = \left(\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3 m_p}\right)^{-1/3} \tag{17}$$

5c(1.5)

電子のド・ブロイ波長 $\lambda_e = h/m_e v_{rms}(electron)$、運動エネルギー $3kT_c/2 = m_e v_{rms}^2(electron)/2$、(12) 式 $T_c = q^4 m_p/24\pi^2\varepsilon_0^2 kh^2$、(15) 式 $M/R = q^4/12\pi^2\varepsilon_0^2 Gh^2$、(17) 式 $d_e = \left(3M/4\pi R^3 m_p\right)^{-1/3}$ を、$d_e \geq \lambda_e/2^{1/2}$ に代入して R について整理すると、次式を得る。

$$R \geq \frac{\varepsilon_0^{1/2} h^2}{4^{1/4} q m_e^{3/4} m_p^{5/4} G^{1/2}} \tag{18}$$

5d(0.5)

5c の結果 (18) に、定数の値を代入して、次式を得る。

$$R \geq 6.9 \times 10^7\,\mathrm{m} = 0.10R(Sun) \tag{19}$$

5e(0.5)

3c の結果 (14)$M/R = 2.4 \times 10^{21}\,\mathrm{kg/m}$ と 5d の結果 (18) より、

$$M \geq 1.7 \times 10^{29}\,\mathrm{kg} = 0.09M(Sun) \tag{20}$$

6　古い星におけるヘリウム核の融合

6a(0.5)

エネルギーの保存則より、$d_c = 4q^2/4\pi\varepsilon_0 m_{He} v_{rms}^2(He)$ が得られる。これと陽子のド・ブロイ波長を $d_c = \lambda_p/2^{1/2}$ に代入して、次式を得る。

$$\frac{4q^2}{4\pi\varepsilon_0 m_{He} v_{rms}^2(He)} = \frac{h}{2^{1/2} m_{He} v_{rms}(He)} \tag{21}$$

$$v_{rms}(He) = \frac{2^{1/2} q^2}{\pi\varepsilon_0 h} = 2.0 \times 10^6 \text{ m/s} \tag{22}$$

また、$3kT(He)/2 = m_{He} v_{rms}^2/2$ より、次式を得る。

$$T(He) = \frac{m_{He} v_{rms}^2}{3k} = 6.5 \times 10^8 \text{ K} \tag{23}$$