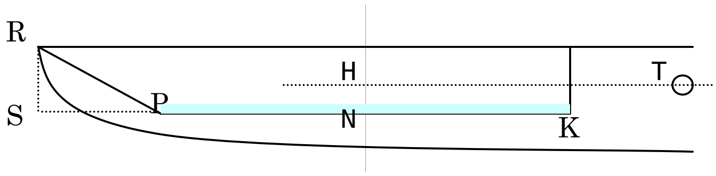
理論第１問　　　　　　　【解答】

1.1 TG の長さの計算

バケツの中の水の体積は$V = 1000\,\mathrm{cm}^3 = 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$であり，バケツの底辺の長さは $d = L - h\tan 60° = (0.74 - 0.12\tan 60°)\mathrm{m} = 0.5322\mathrm{m}$　である（与えられたデータは有効数字２桁であるので，最終的には有効数字２桁で答えるべきであるが，計算の過程ではより多くの桁を残しておく）。



（解答１）水 F が少量であるので，水の重心 H が上図の PK の中点の真上にあると近似する。このとき，$\mathrm{TH} = a + \dfrac{d}{2} = 0.4661\mathrm{m}$　である。モーメントのつり合いにより，

$$\mathrm{TG} = \frac{m}{M}\mathrm{TH} = 0.01554\mathrm{m} \approx \underline{0.016\ \mathrm{m}}$$

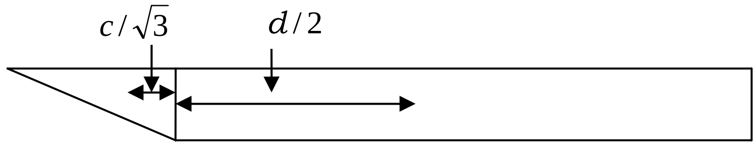
（解答２）バケツの水の深さをcとする。$bcd < V$ なので，$c < 0.01253\mathrm{m}$ である。また, 水の重心の T からの水平距離はバケツの底面の中心と T との水平距離より長く，水面の中心と T との水平距離より短くなるので，$a + \dfrac{d}{2} < \mathrm{TH} < a + \dfrac{d + c\tan 60°}{2}$ である。よって，$0.4661\mathrm{m} < \mathrm{TH} < 0.4770\mathrm{m}$，ゆえに，$0.01554\mathrm{m} < \mathrm{TG} < 0.01590\mathrm{m}$ となる。すなわち有効数字２桁では $\mathrm{TG} = \underline{0.016\ \mathrm{m}}$ である。

（解答３）バケツの水の深さcは，以下の方程式から計算できる。

$$V = bcd + b\frac{c}{2}c\tan 60^0 \Rightarrow c = \frac{(d^2 + 2\sqrt{3}V/b)^{1/2} - d}{\sqrt{3}}$$

V, b, d の値を代入して，$c = 0.01228\mathrm{m}$

下図のように水を三角柱と直方体に分割する。水全体の重心は三角柱の重心と直方体の重心とを結んだ線を $bcd : \dfrac{1}{2}bc^2\tan 60° = 2d : \sqrt{3}c$　に内分する点なので,



$$\mathrm{TN} = a + \frac{d}{2} + \frac{\sqrt{3}c}{\sqrt{3}c + 2d}\left(\frac{d}{2} + \frac{c}{\sqrt{3}}\right) = 0.4714\mathrm{m}$$ となる。ゆえに，

$$\mathrm{TG} = 0.01571\mathrm{m} \approx \underline{0.016\,\mathrm{m}}$$

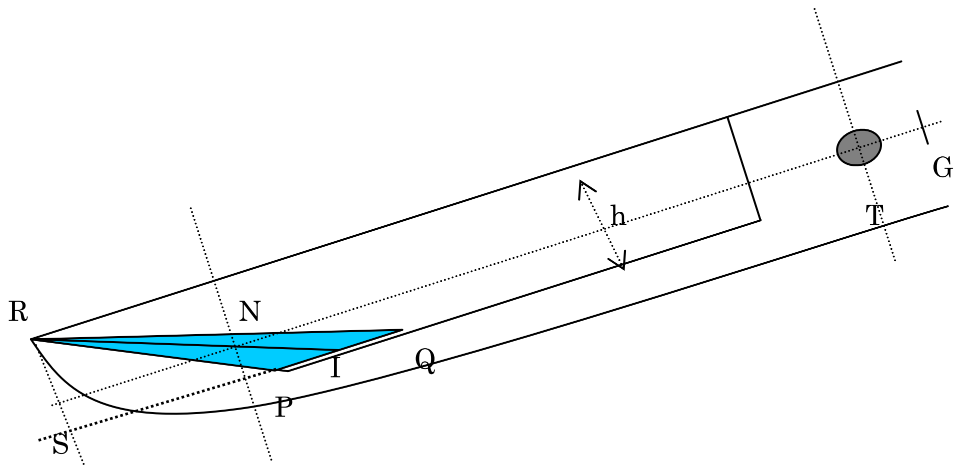
1.2 α_1, α_2 の値の計算

「てこ」が α_1 傾いていると，水面はバケツの縁をとおる。このとき水の体積は $10^{-3}\,\mathrm{m}^3$ である。$\mathrm{PQ} < d$ とすると，下図より $V = hb \times \mathrm{PQ}/2$ なので，

$\mathrm{PQ} = 0.1111\mathrm{m}$ である。これは，明らかに $\mathrm{PQ} < d$ をみたす($d = 0.5322\,\mathrm{m}$)。

$\tan\alpha_1 = \dfrac{h}{\mathrm{QS}} = \dfrac{h}{\mathrm{PQ} + \sqrt{3}h}$ より，$\alpha_1 = \underline{20.6°}$

また，傾きが $30°$ のとき，バケツは空になる。すなわち，$\alpha_2 = \underline{30°}$



1.3 全トルク（力のモーメント）μ が 0 となるときの「てこ」の傾き β とバケツ内の水量 m_1 の計算

$\mathrm{PQ} = x(\mathrm{m})$ とおく。バケツ内の水量は，水の密度を $\rho_{\mathrm{water}} = 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$ として，

$m_1 = \rho_{\mathrm{water}} \dfrac{xhb}{2} = 9x$〔kg〕と書ける。$\mu = 0$ のときバケツ内の水が及ぼすトルクと「てこ」の重さによるトルクはつり合う。バケツ内の水の断面は図中の△PQR である。水の重心 N は線分 RI を 2:1 に内分する点なので，３点 N,T,G は共線である。また，$m_1 g \times \mathrm{TN} = Mg \times \mathrm{TG}$ であるので，

$$m_1 \times \mathrm{TN} = M \times \mathrm{TG} = 30 \times 0.01571 = 0.4713 \qquad (1)$$

TN を x を用いて表すと，

$$\mathrm{TN}=L+a-\frac{2}{3}(h\sqrt{3}+\frac{x}{2})=0.94-0.08\sqrt{3}-\frac{x}{3}=0.8014-\frac{x}{3}$$

(1)式に代入すると，

$$m_1\times\mathrm{TN}=9x(0.8014-x/3)=-3x^2+7.213x \quad (2)$$

よって，x の方程式

$$-3x^2+7.213x=0.4714 \quad (3)$$

を得る。

(3)の解は，$x=2.337$ と $x=0.06723$ であるが，x は 0.5322 より小さいので，$x=x_0=0.06723$ である。したがって，

$$m_1=9x_0=0.6051\,\mathrm{kg}\approx\underline{0.61\mathrm{kg}}$$

また，$\tan\beta=\dfrac{h}{x+h\sqrt{3}}=0.4362$ より，$\beta=23.57°\approx\underline{23.6°}$

2.1 1サイクルでの $\mu(\alpha)$（$\mu(t)$ と $\alpha(t)$ の関係）のグラフ

はじめ，バケツが空のとき，$\alpha=0$ であり，μ は負で，その大きさは，最大値

$$Mg\times\mathrm{TG}=30\times9.81\times0.01571=4.624\,\mathrm{N\cdot m}$$

をとる。トルクの符号は，水平軸のまわりの反時計回りの向きを正とする。

バケツに水が流れ込むにつれて，μ が正となり「てこ」が持ち上がるまで，水が及ぼす正のトルクにより μ が増加する。仮定により，このときからバケツ内の水量は一定である。

「てこ」が傾くことにより，水の重心は回転軸から離れ，μ の増加を引き起こす。そして，μ は水がバケツの縁からこぼれはじめる瞬間に最大値をとる。このとき，$\alpha=\alpha_1=20.6^0$ である。

簡単な計算により，

$$\mathrm{SI}=\mathrm{SP}+\mathrm{PQ}/2=0.12\times1.732+0.1111/2=0.2634\,\mathrm{m}$$

$$\mathrm{TN}=0.20+0.74-\frac{2}{3}\mathrm{SI}=0.7644\,\mathrm{m}$$

$$\begin{aligned}\mu_{\max}&=(1.0\times\mathrm{TN}-30\times\mathrm{TG})g\cos20.6°\\&=(1.0\times0.7644-30\times0.01571)\times9.81\times\cos20.6°=2.691\,\mathrm{N\cdot m}\\&\approx\underline{2.7\,\mathrm{N\cdot m}}\end{aligned}$$

バケツがこれより傾くと，バケツ内の水量は減少し，ついには$\alpha=\beta$，$\mu=0$となる。そして，慣性のためにαは増加し，μは減少し続ける。

$\alpha=\alpha_2=30°$のとき，バケツは空になり，

$$\mu=-30\times g\times \mathrm{TG}\times\cos 30°=\underline{-4.0\ \mathrm{N\cdot m}}$$

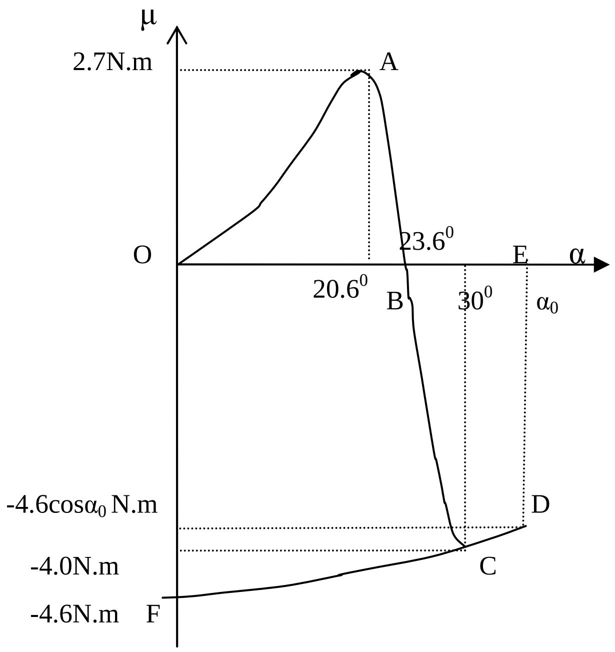
慣性のためにαはα_0に達するまで増加し，

$$\mu=-Mg\cdot\mathrm{TG}\cos\alpha_0=-4.62\cos\alpha_0\ \mathrm{N\cdot m}$$

となり，その後，急速に$\alpha=0$へと減少する。$\alpha=0$のとき，

$$\mu\approx\underline{-4.6\ \mathrm{N\cdot m}}$$

以上をもとに，$\mu(t)$と$\alpha(t)$とのグラフ$\mu(\alpha)$を描くと，下図を得る。



2.2 トルク$\mu(\alpha)$の及ぼす微小な仕事は$dw=\mu(\alpha)d\alpha$と表せる。1 サイクルで「てこ」が$\mu(\alpha)$により得るエネルギーは，$w=\int\mu(\alpha)d\alpha$，すなわち，$\mu(\alpha)$のグラフが囲む面積である。よって，W_{total}はグラフ$\mu(\alpha)$における<u>曲線(OABCDFO)の囲む面積</u>に等しい。

「てこ」が臼に与える仕事は，てこが$\alpha=\alpha_0$の状態から水平になる，すなわ

ち$\alpha = 0$となるまでに得るエネルギーに等しい。よって，W_{pounding}はグラフ$\mu(\alpha)$における(OEDFO)の面積であり，その大きさは，はじめ「てこ」がもっていた位置エネルギー$gM \times \mathrm{TG} \times \sin\alpha_0 = 4.6\sin\alpha_0$（J）に等しい。

2.3　点 D で「てこ」のもつ運動エネルギーが 0 であることを考慮することで，α_0の大きさを計算できる。すなわち，

図形(OABO) = 図形（BEDCB）

OABO を三角形に，BEDCB を台形に近似することにより，

$$23.6 \times 2.7 \times (1/2) = 4.0 \times [(\alpha_0 - 23.6) + (\alpha_0 - 30)] \times (1/2)$$

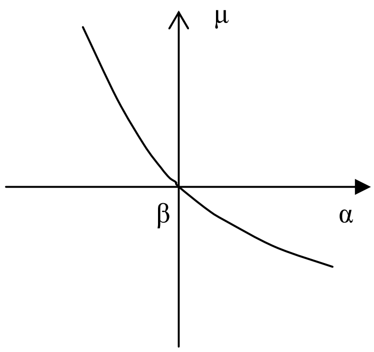
これより，$\alpha_0 = \underline{34.7^\circ}$を得る。よって，

$$W_{\text{pounding}} = \text{領域(OEDFO)} = -\int_{34.76}^{0} Mg \times \mathrm{TG} \times \cos\alpha \, d\alpha$$

$$= 4.62 \times \sin 34.7^0 = 2.63 \approx \underline{2.6\,\mathrm{J}}$$

3.1.1 バケツから常に水があふれている。$\mu(\alpha)$のグラフは$\alpha = \beta$の近傍では単調減少である。グラフによると，$\alpha = \beta$は安定な平衡点であるとわかる。

　αが増加すると，αを減少させる負のトルクが働き，αが減少すると，αを増加させる正のトルクが働く。



3.1.2 $\alpha = \beta + \Delta\alpha$（$\Delta\alpha$は微小）のときのトルクμの計算

「てこ」がαだけ傾いているときバケツ内の水量は$m = (1/2)\rho bh\mathrm{PQ}$であり，

また，$\mathrm{PQ} = h\left(\dfrac{1}{\tan\alpha} - \dfrac{1}{\tan 30^0}\right)$である。$\alpha$が$\beta$から$\alpha = \beta + \Delta\alpha$まで増加するとき，バケツ内の水量の増加は，

$$\Delta m = \frac{1}{2}\rho bh\Delta\mathrm{PQ} = \frac{1}{2}\rho bh\frac{\partial \mathrm{PQ}}{\partial\alpha}\Delta\alpha = -\frac{\rho bh^2}{2\sin^2\alpha}\Delta\alpha \approx -\frac{\rho bh^2}{2\sin^2\beta}\Delta\alpha$$

である。

　傾き$\alpha = \beta + \Delta\alpha$のとき，「てこ」に作用するトルクは，$\Delta m$によるトルクに等

しい。よって，

$$\mu = \Delta m \times g \times \mathrm{TN} \times \cos(\beta + \Delta\alpha) \approx \Delta m \times g \times \mathrm{TN} \times \cos\beta$$

TN の大きさは「てこ」の傾きが β のときの平衡の条件より計算できる。すなわち，

$$\mathrm{TN} = M \times \mathrm{TG}/m_1 = 30 \times 0.01571/0.605 = 0.779\ \mathrm{m}$$

$$\therefore \quad \mu = -47.2\Delta\alpha \mathrm{N\cdot m} \approx \underline{-47\Delta\alpha\ \mathrm{N\cdot m}}$$

3.1.3 「てこ」の回転運動方程式は，

$$\underline{I\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \mu} \quad （ただし\ \mu = -47.2\Delta\alpha\ \mathrm{N\cdot m}，\ \alpha = \beta + \Delta\alpha）$$

I は「てこ」とバケツ内の水の軸 T まわりの慣性モーメントの和である。バケツ内の水量は α に依存するので， I は一定でない。しかし， $\Delta\alpha$ が微小のとき，バケツ内の水量も水の形も変化しないとみなせ，I は近似的に一定である。バケツ内の水は質量 0.605kg の質点とみなせる。よって，簡単な計算により，

$$I = 12 + 0.605 \times 0.779^2 = 12.37\mathrm{kgm^2} \approx 12.4\mathrm{kgm^2}$$

$$\therefore \quad 12.4\frac{d^2(\Delta\alpha)}{dt^2} = -47.2\Delta\alpha$$

これは単振動の方程式であり，その周期は，

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{12.4}{47.2}} = 3.22\mathrm{s} \approx \underline{3.2\mathrm{s}}$$

3.2 バケツから常に水があふれているときの $\alpha = \beta$ 付近での単振動

「てこ」は $\alpha = \beta$ を中心に振幅 $\Delta\alpha_0$ の単振動をしているとする。$t = 0$ のとき $\Delta\alpha = 0$ であるとする。このとき水があふれている。dt の間に傾きは $d\alpha$ 変化する。この問題で調べるべきなのは $d\alpha < 0$，すなわち，「てこ」が α の減少する向きへ運動する場合であり，このとき，バケツをあふれさせる以上の水を供給する必要がある。「てこ」の運動は $\Delta\alpha = -\Delta\alpha_0 \sin\frac{2\pi}{\tau}t$ と表される。よって，

$$d(\Delta\alpha) = d\alpha = -\Delta\alpha_0\frac{2\pi}{\tau}\cos\frac{2\pi}{\tau}t\,dt$$

である。

バケツから水があふれるためには，この間にバケツに流れ込む水量は少なくとも $dm = -\dfrac{bh^2\rho}{2\sin^2\beta}d\alpha = \dfrac{\Delta\alpha_0\pi bh^2\rho}{\tau\sin^2\beta}\cos\left(\dfrac{2\pi}{\tau}t\right)dt$ である。

dm は $t = 0$ のとき最大となり， $dm_0 = \dfrac{\pi bh^2\rho\Delta\alpha_0}{\tau\sin^2\beta}dt$

バケツに流れ込む水量と流量 Φ は関係式をみたす。ゆえに，

$$\Phi = \frac{\pi b h^2 \rho \Delta\alpha_0}{\tau \sin^2\beta}$$

単振動をするためにはバケツから水があふれる必要があるので，「てこ」が振幅1°，すなわち $\Delta\alpha_0 = 2\pi/360\,\mathrm{rad}$ の単振動をするためには，

$$\Phi_1 = \frac{\pi b h^2 \rho \cdot 2\pi}{360\tau \sin^2\beta} = 0.2309\,\mathrm{kg/s} \approx \underline{0.23\mathrm{kg/s}}$$

として，$\Phi \geq \Phi_1$ をみたす必要がある。

3.3 Φ_2 の計算

傾きが $\alpha_1 = 20.6°$ まで減少しても，バケツから水があふれ続けていると，このときバケツ内の水量は 1kg に達し，「てこ」の単振動の振幅は $23.6° - 20.6° = 3°$ となる。流量は$3\Phi_1$を超えなければならない。よって，

$$\Phi_2 = 3 \times 0.23\,\mathrm{kg/s} = 0.69\,\mathrm{kg/s} \approx \underline{0.7\,\mathrm{kg/s}}$$

これは米つき機が機能しない最小の流量にほかならない。

理論第２問　　　　　　　　　　　【解答】

1.

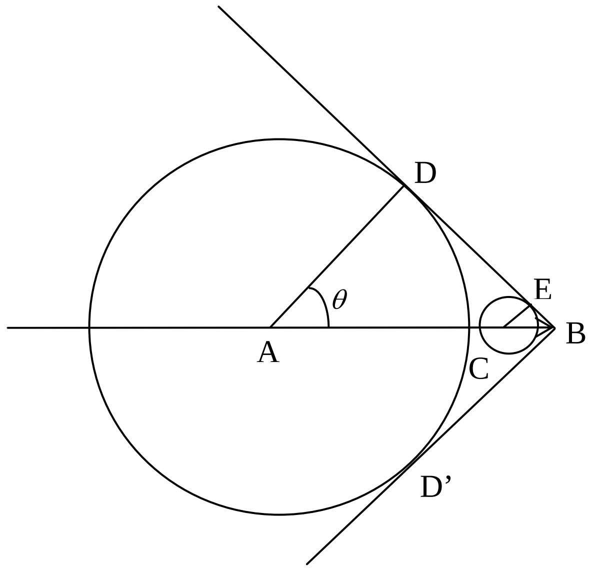


図 1

粒子の軌跡を含む平面で考えよう。粒子は時刻$t=0$に点 A の位置にあり，時刻$t=t_1$に点 B に達する。 図 1 において，A から出た球面波の半径は，時刻$t=t_1$には AD となっている。また，AB 間の任意の点 C から出た球面波の半径は，時刻$t=t_1$には CE となっている。ここで，その半径 CE は，次に示すように中心 C と B の距離 CB に比例する。

$$\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{CB}}=\frac{c(t_1-t)/n}{v(t_1-t)}=\frac{1}{\beta n}=\mathrm{const.}$$

したがって，全ての球面波に接する包絡面は，B を頂点とする，半頂角$\varphi=\arcsin\dfrac{1}{\beta n}=\dfrac{\pi}{2}-\theta$ の円錐となる。（θは粒子の軌跡と光線のなす角）

1.1. 波面とこの紙面の交線は，2 つの（半）直線 BD と BD'。

1.2. 粒子の軌道と交線のなす角度は，$\underline{\varphi=\arcsin\dfrac{1}{\beta n}}$

2. リング状の像ができることを示す作図は, 粒子の軌跡と凹面鏡の中心軸を含む

平面内で考える。また，問題文にもあるが，次の表記を用いる。

S – 荷電粒子のビームと凹面鏡の交わる点

F – 凹面鏡の焦点

C – 凹面鏡の球面の中心

IS – 荷電粒子のビームの軌跡。凹面鏡の中心軸と小さな角度 α をなす。

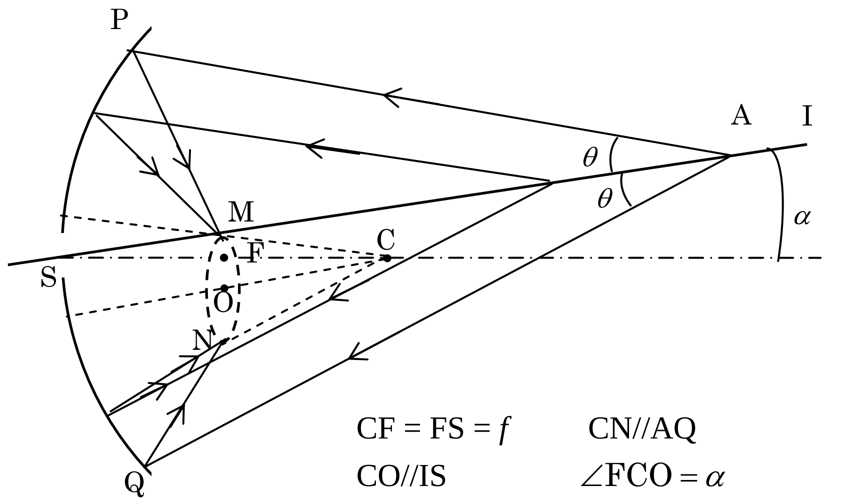


図２

まず，C を通る直線を IS に平行に引く。この直線と焦点面は点 O で交わる。次に，C から，CO と θ の角度をなす直線を CO の両側に引き，それらと焦点面との交点をそれぞれ M，N とする。すると，粒子ビームから出る AP(//CM)方向のすべての光は M に集まり，AQ(//CN)方向のすべての光は N に集まる。三次元的に考えても同じように，ビームからある方向へ放射される全ての光は，C を通るその方向への直線と焦点面の交点に集まる。よって，図２の点線のように，焦点面上に O を中心として半径 OM のリング状の像ができることがわかる。

また，α と θ は小さな角度なので，$\mathrm{FO} \approx \underline{f\alpha}$，$r = \mathrm{MO} \approx \underline{f\theta}$ となる。

3.1 チェレンコフ光放射が起こるためには $v > \frac{c}{n}$ であることが必要なので，そのための最低の屈折率は，$n_{\min} = \frac{c}{v}$ である。$\xi_{\min} = n_{\min} - 1 = aP_{\min}$ とおくと，

$$\xi_{\min} = aP_{\min} = \frac{c}{v} - 1 = \frac{1}{\beta} - 1 \tag{1}$$

また，$K = \dfrac{Mc^2}{pc}$ とおくと，

$$K = \frac{Mc^2}{pc} = \frac{Mc}{p} = \frac{Mc}{\dfrac{Mv}{\sqrt{1-\beta^2}}} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} \tag{2}$$

これより，β を K で表すと，

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1+K^2}} \tag{3}$$

となる。ここで，K の値はそれぞれ $K = 0.094$（陽子），0.05（K 中間子），0.014（π 中間子）なので，3 種類のどの粒子に対しても $K^2 << 1$ である。K の 2 乗より高次の項を無視すると，(3)式は次のように表せる。

$$1-\beta = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+K^2}} \approx \frac{1}{2}K^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{Mc}{p}\right)^2 \tag{3a}$$

$$\frac{1}{\beta} - 1 = \sqrt{1+K^2} - 1 \approx \frac{1}{2}K^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{Mc}{p}\right)^2 \tag{3b}$$

(3b)式を(1)式に代入すると，

$$P_{\min} = \frac{1}{2a}K^2 \tag{4}$$

これに上で求めたそれぞれの K の値を代入すれば，最低の気圧は次のように求まる。

$P_{\min}$ = 16 atm （陽子）
$P_{\min}$ = 4.6 atm （K 中間子）
$P_{\min}$ = 0.36 atm （π 中間子）

3.2 問題 **2.**より，リング像の半径は $r = \mathrm{MO} \approx f \times \theta$ と書ける。これより，K 中間子のリング像の半径が π 中間子のリング像の半径の半分であるから，$\theta_\pi = 2\theta_K$ が成り立つ。2 倍角の公式

$$\cos\theta_\pi = \cos 2\theta_K = 2\cos^2\theta_K - 1 \tag{5}$$

より，

$$\frac{1}{\beta_\pi n} = \frac{2}{\beta_K^2 n^2} - 1 \tag{6}$$

また ε を，

$$\varepsilon = 1 - \beta = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+K^2}} \approx \frac{1}{2}K^2 \tag{7}$$

と定め，$\beta=1-\varepsilon$ と $n=1+\zeta$ を(6)式に代入する。このとき，ε と ζ は十分に小さいので，これらの 2 次以上の項は全て無視する。すると(6)式は,

$$1-\zeta+\varepsilon_\pi=1-4\zeta+4\varepsilon_K$$

となり，題意を満たす $\zeta=\zeta_{\frac{1}{2}}$ と $P=P_{\frac{1}{2}}$ と n は，それぞれ次のように求まる。

$$\zeta_{\frac{1}{2}}=\frac{4\varepsilon_K-\varepsilon_\pi}{3}=\frac{1}{6}\left(4K_K^2-K_\pi^2\right)=\frac{1}{6}\left[4\times(0.05)^2-(0.014)^2\right]$$

$$P_{\frac{1}{2}}=\frac{1}{a}\zeta_{\frac{1}{2}}=\underline{6\,\mathrm{atm}}\,,\quad n=1.00162$$

この n と前問で求めた K_K を $\theta=\arccos\dfrac{1}{\beta n}\approx\arccos\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{1}{2}K^2\right)$ に代入すると,

$$\theta_K=\underline{1.6^\circ}\,,\quad \theta_\pi=2\theta_K=\underline{3.2^\circ}$$

また，この空気の圧力では,

$$P_{\frac{1}{2}}=6\,\mathrm{atm}<16\,\mathrm{atm}=P_{\min}\quad\text{（陽子）}$$

なので，陽子ビームのリング像は観察されない。

4.1

$\cos\theta=\dfrac{1}{\beta n}$ の両辺の対数をとって β で微分すると（以下，$d\theta\to\varDelta\theta$，$d\beta\to\varDelta\beta$ と表す）,

$$\frac{\sin\theta\cdot\varDelta\theta}{\cos\theta}=\frac{\varDelta\beta}{\beta}\tag{8}$$

(3a)式の両辺の対数をとって微分すると,

$$\frac{\Delta\beta}{1-\beta}=2\frac{\Delta p}{p}\tag{9}$$

を得る。(8)，(9)式より $\varDelta\beta$ を消去すると,

$$\frac{\varDelta\theta}{\varDelta p}=\frac{2}{\tan\theta}\frac{1-\beta}{p\beta}$$

となり，さらに (3b)式と近似 $\tan\theta\approx\theta$ を用いると，次のように書ける。

$$\frac{\varDelta\theta}{\varDelta p}=\frac{2}{\tan\theta}\frac{1-\beta}{p\beta}\approx\frac{K^2}{\theta p}\tag{10}$$

K 中間子の場合は，$K_K=0.05$，$\theta_K=1.6^\circ=1.6\dfrac{\pi}{180}\,\mathrm{rad}$ を代入して,

$$\frac{\Delta\theta_K}{\Delta p} = \frac{0.05^2}{1.6\frac{\pi}{180}\times 10\ \text{GeV}/c} \times \frac{180}{\pi} = \underline{0.51\,^\circ/(\text{GeV}/c)}$$

π 中間子の場合は, $K_\pi = 0.014$, $\theta_\pi = 3.2° = 3.2\frac{\pi}{180}\text{rad}$ を代入して,

$$\frac{\Delta\theta_\pi}{\Delta p} = \frac{0.014^2}{3.2\frac{\pi}{180}\times 10\ \text{GeV/c}} \times \frac{180°}{\pi} = \underline{0.02\,^\circ/(\text{GeV}/c)}$$

4.2 2 つの像が区別できる条件は,

$$\Delta\theta < 0.1(\theta_\pi - \theta_K) = 0.16°$$

この $\Delta\theta$ は,

$$\Delta\theta = \Delta\theta_K + \Delta\theta_\pi = \frac{\Delta\theta_K + \Delta\theta_\pi}{\Delta p}\Delta p = \left(0.53\,^\circ/(\text{GeV}/c)\right)\cdot \Delta p$$

と表されるので, Δp について解けば, 次式を得る。

$$\Delta p < \frac{1}{10}\times\frac{1.6}{0.53} = \underline{0.3\,\text{GeV}/c}$$

5.1 チェレンコフ光放射が起こるために必要な β の最低の値は,

$$\beta = \frac{1}{n} = \frac{3}{4} \tag{11}$$

また, 静止質量 M, エネルギー E の粒子の運動エネルギー T は,

$$T = E - Mc^2 = \frac{Mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - Mc^2 = Mc^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right] \tag{12}$$

と表される。よって, (11)式の β を(12)式に代入して, チェレンコフ光を発するために荷電粒子がもつべき最低の運動エネルギー $T_{\min}$ を得る。

$$T_{\min} = Mc^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{9}{16}}} - 1\right] = \underline{0.51\,Mc^2} \tag{13}$$

5.2 α 粒子は静止質量 $M_\alpha = 3.8\ \text{GeV}/c^2$, β 粒子は静止質量 $M_e = 0.51\ \text{MeV}/c^2$ である。これらを(13)式に代入すると, $T_{\min}$ はそれぞれ次のようになる。

$$T_{\min}(\alpha\ 粒子) = 0.51\times 3.8\ \text{GeV} = \underline{1.94\,\text{GeV}}$$

$$T_{\min}(\beta\ 粒子) = 0.51\times 0.51\ \text{MeV} = \underline{0.26\,\text{MeV}}$$

また，放射線源から放射される粒子の運動エネルギーは数 MeV 以上にならないことから，チェレンコフが観測した光を発した粒子は，$\underline{\beta\text{粒子}}$。

6.1 一定の運動量をもつ荷電粒子のビームに対してθは,

$$\cos\theta = \frac{1}{n\beta} \tag{14}$$

と表された。この両辺の対数をとってnで微分する（βは定数）と,

$$\frac{\sin\theta\cdot\delta\theta}{\cos\theta} = \frac{\delta n}{n} \quad . \tag{15}$$

となる。いま，δnは可視光の最短波長に対する空気の屈折率n_{v}，および最長波長に対する屈折率n_{r}の差$\delta n = n_{\mathrm{v}} - n_{\mathrm{r}}$である。題意より,

$$n_{\mathrm{v}} - 1 = (1 + 0.02)(n_{\mathrm{r}} - 1)$$

$$\therefore \quad \delta n = n_{\mathrm{v}} - n_{\mathrm{r}} = 0.02(n_{\mathrm{r}} - 1) \approx 0.02(n - 1)$$

と表される。問題 3.2 より，$P = 6$ atm の空気に対して$\theta_\pi = 3.2° = 3.2\dfrac{\pi}{180}\,\mathrm{rad}$，$n = 1.00162$ を用いると，$\delta\theta$は次のように求められる。

$$\delta\theta = \frac{\delta n}{n\tan\theta} \approx \frac{\delta n}{\theta} = \frac{0.02\times(1.0016-1)}{3.2\times\dfrac{\pi}{180}}\times\frac{180}{\pi} = \underline{0.033\,°}$$

ここで，$\tan\theta \approx \theta$，$n \approx 1$と近似した。

6.2.1 可視光の波長の幅に起因するリング像の幅の半値半幅は, 問題 6.1 で求めた$\delta\theta$の半分なので,

$$\frac{1}{2}\delta\theta = \underline{0.017\,°}$$

運動量の幅に起因するリング像の幅の半値半幅は，問題 4.1 で得られた関係式$\dfrac{\Delta\theta_\pi}{\Delta p} = 0.02\,°/(\mathrm{GeV}/c)$と，運動量の半値半幅$\Delta p = 0.3\,\mathrm{GeV}/c$を用いて,

$$0.02\,°/(\mathrm{GeV}/c)\times 0.3\,\mathrm{GeV}/c = \underline{0.006\,°}$$

と計算できる。これは，波長に起因するリング像の幅のばらつきの 3 分の 1 程度である。

6.2.2 波長が短くなるにつれ，空気の屈折率nは大きくなる。nが大きくなると，関係式$\cos\theta = \dfrac{1}{\beta n}$より，$\theta$は大きくなる。したがって，リング像の内側から外側に向かうにつれて，放射される光の波長は短くなる。このことを解答用紙の表に書き込むと，

	青	白	赤
リングの内側の縁の色			○
リングの中ほどの色		○	
リングの外側の縁の色	○		

となる。

理論第３問　　　　　　　　　　　**【解答】**

1. 高度差dzの圧力差をdpとすると, この間の空気にはたらく力のつり合いより,

$$dp = -\rho g dz \tag{1}$$

となる。ここで，gは重力加速度の大きさ，ρは空気の密度である。空気の密度は理想気体の状態方程式

$$pV = \frac{m}{\mu} RT$$

を用いると,

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\mu p}{RT} \tag{1-1}$$

となる。これより，(1)式の微分方程式

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} dz$$

を得る。

1.1. 空気の温度は一定でT_0に等しいとすると,

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT_0} dz$$

となるから，初期条件「$z = 0$のとき，$p = p_0$」を用いて積分し,

$$p(z) = \underline{p_0 e^{-\frac{\mu g}{RT_0} z}} \tag{2}$$

を得る。

1.2. もし,

$$T(z) = T(0) - \Lambda z \tag{3}$$

であれば,

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{R[T(0) - \Lambda z]} dz \tag{4}$$

となる。

1.2.1. 初期条件「$z = 0$で，$p = p_0$」を用いて，(4)式の両辺を積分すると,

$$\ln \frac{p(z)}{p_0} = \frac{\mu g}{\Lambda R} \ln \frac{T(0) - \Lambda z}{T(0)}$$

$$\therefore \quad p(z) = \underline{p_0 \left(1 - \frac{\Lambda z}{T(0)}\right)^{\frac{\mu g}{\Lambda R}}} \tag{5}$$

となる。

1.2.2. もし，

$$\frac{\rho(z)}{\rho(0)} > 1$$

ならば，自由対流が生じる。(1-1)式より，空気の密度は，

$$\frac{\rho(z)}{\rho(0)} = \frac{p(z)}{p(0)}\frac{T(0)}{T(z)} = \left(1 - \frac{\Lambda z}{T(0)}\right)^{\frac{\mu g}{\Lambda R}-1}$$

となる。これより，指数が負のとき，上式の最右辺は 1 より大きくなり，自由対流が起こる。

$$\frac{\mu g}{\Lambda R} - 1 < 0$$

こうして，

$$\Lambda > \frac{\mu g}{R} = \frac{29\times10^{-3}\times9.81}{8.31} = \underline{3.4\times10^{-2}\ \mathrm{K/m}}$$

を得る。

2. 空気塊は断熱変化をし，その温度 T_{parcel} と圧力 p の間にはポアソンの関係式が成り立つため，T_{parcel} は p に依存して決まる。また，上下方向へ動く空気塊の圧力 p は，つねに周囲の大気圧に等しく，大気圧は高度 z に依存する。

2.1. 上に述べたことより，次式が成り立つ。

$$\frac{dT_{\mathrm{parcel}}}{dz} = \frac{dT_{\mathrm{parcel}}}{dp}\frac{dp}{dz}$$

$\dfrac{dT_{\mathrm{parcel}}}{dp}$ の表式：

ポアソンの関係式 $pV^{\gamma} = \mathrm{const.}$ に空気塊の状態方程式 $pV = nRT_{\mathrm{parcel}}$（$n$ ：モル数）を用いて V を消去すると，

$$T_{\mathrm{parcel}}\,p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \mathrm{const.} \qquad (6)$$

(6)式の両辺を p で微分して，

$$\frac{dT_{\mathrm{parcel}}}{dp} = \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{T_{\mathrm{parcel}}}{p} \qquad (7)$$

$\dfrac{dp}{dz}$ の表式：

(1)式より，

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{\mu g p}{RT}$$

となる。ここで，T は外気の温度である。

こうして，

$$\frac{dT_{\text{parcel}}}{dz} = -\frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{\mu g}{R}\frac{T_{\text{parcel}}}{T} \qquad \therefore \quad \underline{G = \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{\mu g}{R}\frac{T_{\text{parcel}}}{T}} \tag{8}$$

一般に，G は一定ではない。

2.2.

2.2.1. $T = T_{\text{parcel}}$ のとき，(8)式より，

$$\Gamma = \underline{\frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{\mu g}{R}} = \underline{\frac{\mu g}{c_p}} = \text{const.} \tag{9}$$

2.2.2. $\Gamma = \dfrac{0.029 \times 9.81}{\dfrac{7}{2} \times 8.31} = \underline{9.78 \times 10^{-3}\ \text{K/m}}$

2.2.3. $\dfrac{dT_{\text{parcel}}}{dz} = -\Gamma = \text{const.}$ より，地表 $z = 0$ での温度 $T(0)$ を用いて，

$$T(z) = T_{\text{parcel}}(z) = \underline{T(0) - \Gamma z} = T(0) - 9.78 \times 10^{-3} z \tag{10}$$

2.3. (8)式に(9)式を代入すると，

$$\frac{dT_{\text{parcel}}}{T_{\text{parcel}}} = -\Gamma \frac{dz}{T(0) - \Lambda z}$$

となるから，初期条件「$z = 0$ のとき，$T_{\text{parcel}} = T_{\text{parcel}}(0)$」を用いて積分して，

$$\ln \frac{T_{\text{parcel}}(z)}{T_{\text{parcel}}(0)} = \frac{\Gamma}{\Lambda} \ln \frac{T(0) - \Lambda z}{T(0)}$$

となる。これより，

$$T_{\text{parcel}}(z) = \underline{T_{\text{parcel}}(0)\left(\frac{T(0) - \Lambda z}{T(0)}\right)^{\Gamma/\Lambda}} \tag{11}$$

を得る。

2.4. (11)式より，

$$T_{\text{parcel}}(z) = T_{\text{parcel}}(0)\left(1 - \frac{\Lambda z}{T(0)}\right)^{\Gamma/\Lambda}$$

$$\approx T_{\text{parcel}}(0)\left(1 - \frac{\Gamma z}{T(0)}\right) \approx \underline{T_{\text{parcel}}(0) - \Gamma z} \qquad (12)$$

3. 大気の安定性

3.1. 空気塊と大気の圧力はつねに等しい。高度z_0では$T_{\text{parcel}}(z_0) = T(z_0)$であるから，空気塊の密度$\rho_{\text{parcel}}$と大気の密度$\rho$は等しく，空気塊はつり合いの状態にある。空気塊の位置がz_0から微小な変位を考えるかぎり，$G = \Gamma$とみなすことができる。また，微小変位であるから$T_{\text{parcel}}(z)$に対しては，(12)式を用いることができる。よって，空気塊の位置が$z = z_0 + d$となったとき，

$$T_{\text{parcel}}(z_0 + d) = T_{\text{parcel}}(z_0) - \Gamma d$$

$$T(z_0 + d) = T(z_0) - \Lambda d$$

となる。

$d > 0$のとき，

$$\Lambda > \Gamma \quad \Rightarrow \quad T_{\text{parcel}}(z_0 + d) > T(z_0 + d) \quad \Rightarrow \quad \rho_{\text{parcel}} < \rho$$

となり，空気塊は上昇し，不安定になる。

以上より，答は，

不安定：$\underline{\Lambda > \Gamma}$，安定：$\underline{\Lambda < \Gamma}$，中立：$\underline{\Lambda = \Gamma}$

3.2. 地上$z = 0$では，つり合いの高度$z = h$からの変位は大きい。よって，$T_{\text{parcel}}(z)$に対して(11)を用いる。

$T_{\text{parcel}}(h) = T(h)$より，

$$T_{\text{parcel}}(0)\left(\frac{T(0) - \Lambda h}{T(0)}\right)^{\Gamma/\Lambda} = T(0) - \Lambda h$$

を得る。ここで，

$$T_{\text{parcel}}(0)\left(\frac{T(0)-\Lambda h}{T(0)}\right)^{\Gamma/\Lambda} = T_{\text{parcel}}(0)\left(1-\frac{\Lambda h}{T(0)}\right)^{\Gamma/\Lambda}$$

$$T(0)-\Lambda h = T(0)\left(1-\frac{\Lambda h}{T(0)}\right)$$

となるから，

$$1-\frac{\Lambda h}{T(0)} = \left(\frac{T(0)}{T_{\text{parcel}}(0)}\right)^{\frac{\Lambda}{\Gamma-\Lambda}}$$

となり，

$$\underline{h = \frac{1}{\Lambda}\left[T(0) - \left(\frac{(T(0))^{\Gamma}}{(T_{\text{parcel}}(0))^{\Lambda}}\right)^{\frac{1}{\Gamma-\Lambda}}\right]} \qquad (13)$$

を得る。

4.

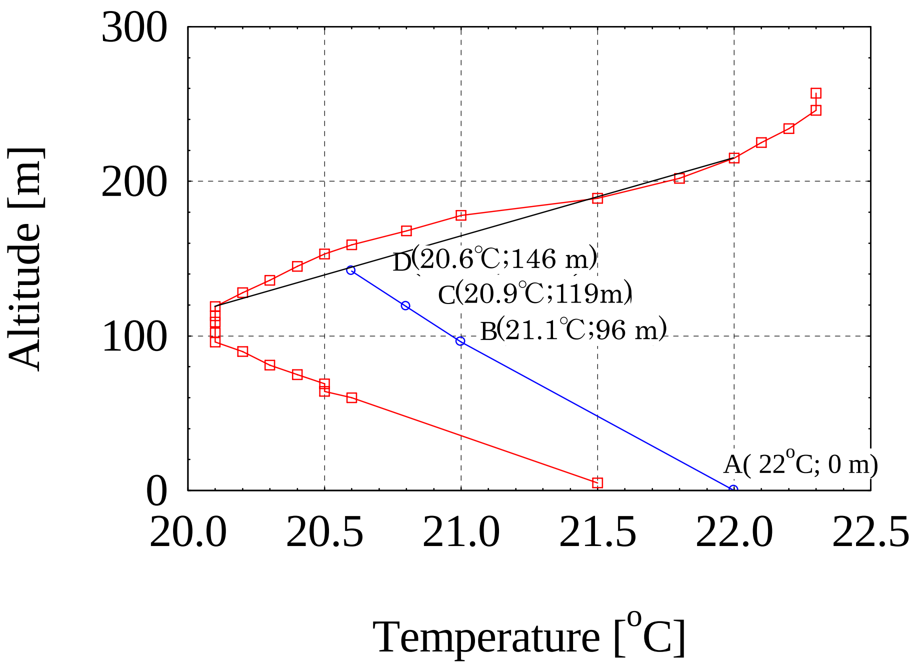


図 1

4.1. ３つの層に対する Λ の値は，次のように求められる。

(1) $0 < z < 96$ m, $\quad \Lambda = \dfrac{21.5-20.1}{96-5} = 15.4\times10^{-3}$ K/m

(2) $96\ \text{m} < z < 119\ \text{m}, \quad \Lambda = 0$，等温層

(3) $119\ \text{m} < z < 215\ \text{m}, \quad \Lambda = -\dfrac{22.0-20.1}{215-119} = -19.8\times10^{-3}\ \text{K/m}$

地上$z=0$での気温は，図 1 を外挿して$T(0) = 21.6\ ℃ = 294.6\ \text{K}$となるから，(1)層に対する$\Lambda$の値を(11)式へ用いて，

$$T_{\text{parcel}}(96\text{m}) = 295\times\left(\frac{294.6-15.4\times10^{-3}\times96}{294.6}\right)^{\frac{9.78\times10^{-3}}{15.4\times10^{-3}}}$$

$$= 294.06\ \text{K} \approx \underline{294.1\ \text{K}} = \underline{21.1\ ℃}$$

(2)層は等温層であるから，$T(z) = 293.1\ \text{K} = 20.1\ ℃$，$T_{\text{parcel}}(96\text{m}) = 294.1\ \text{K}$を用いて，(8)式より，

$$\frac{dT_{\text{parcel}}}{T_{\text{parcel}}} = -\frac{\Gamma}{T(z)}dz$$

となるから，この式を積分して，$z = 96 + h_1[\text{m}]$での空気塊の温度は，

$$T_{\text{parcel}}(z) = T_{\text{parcel}}(96\text{m})\exp\left[-\frac{\Gamma}{T(z)}h_1\right]$$

と表される。これより，$h_1 = 119-96 = 23\ \text{m}$として，

$$T_{\text{parcel}}(119\text{m}) = 293.87 \approx \underline{293.9\ \text{K}} = \underline{20.9\ ℃}$$

4.2. (3)層では，119 m からスタートして(13)式を用いる。

$$h_2 = \frac{1}{-19.8\times10^{-3}}\left[293.1 - \left(\frac{293.1^{9.78\times10^{-3}}}{293.9^{-19.8\times10^{-3}}}\right)^{\frac{1}{9.78\times10^{-3}+19.8\times10^{-3}}}\right] = 27.0\ \text{m}$$

よって，最高の高度は，

$$H = 119 + 27.0 = \underline{146\ \text{m}}$$

このときの温度は，

$$T_{\text{parcel}}(H) = T(H) = T(119\text{m}) - \Lambda h_2$$

$$= 293.1 + 19.8\times10^{-3}\times27.0 = \underline{293.6\ \text{K}} = \underline{20.6\ ℃}$$

5. 単位時間あたりに排出される CO の質量は，

$$M = 12\times10^{-3}\times5\times8\times10^{5}/3600 = 13.3\ \text{kg/s}$$

である。

5.1. 時間 dt あたりの CO 濃度の変化を dC とすると，この間，ハノイ市街にオートバイから排出される CO の量は Mdt，風で運び出される CO の量は $LHC(t)udt$，ハノイ市街の CO の増加量は $LHWdC$ と書けるから，

$$Mdt - LHC(t)udt = LHWdC$$

が成り立つ。これより，求める微分方程式は，

$$\underline{\frac{dC}{dt} + \frac{u}{W}C(t) = \frac{M}{LHW}} \qquad (14)$$

となる。

5.2. (14)式は，

$$\frac{dC}{dt} + \frac{u}{W}\left(C(t) - \frac{M}{LHu}\right) = 0$$

と書けるから，任意定数を K として微分方程式(14)の一般解は，

$$C(t) = K\exp\left(-\frac{u}{W}t\right) + \frac{M}{LHu} \qquad (15)$$

となる。ここで，初期条件：$C(0) = 0$ を用いて，

$$\underline{C(t) = \frac{M}{LHu}\left[1 - \exp\left(-\frac{u}{W}t\right)\right]} \qquad (16)$$

を得る。

5.3. (16)式より，午前８時を $t = 3600\ \mathrm{s}$ として，

$$C(3600\mathrm{s}) = \frac{13.3}{15\times10^3\times146\times1}\left[1 - \exp\left(-\frac{1}{8\times10^3}\times3600\right)\right]$$

$$= \underline{2.2\times10^{-6}\ \mathrm{kg/m^3}} = \underline{2.2\ \mathrm{mg/m^3}}$$