Orange

この問題では，乗用車が衝突する際，エアバッグが作動するように設計された加速度計の簡単なモデルを考える。加速度がある限界値を超えると，回路のある点での電圧がしきい値を超えるため，結果として，エアバッグが作動するような電気機械的なシステムをつくりたい。

注：この問題では，重力を無視する。

1　図 1 に示された平行極板からなるコンデンサーを考える。コンデンサーの極板面積は A であり，極板間隔は d である。極板間隔は，極板の大きさに比べて十分小さい。一方の極板は，弾性定数 k のバネを介して壁とつながれ，もう一方の極板は固定されている。コンデンサー極板に電荷がないとき，極板間の距離は d であり，バネは自然長である。極板間の空気の誘電率は，真空の誘電率 ε_0 に等しいとする。極板間隔が d のときのコンデンサーの容量は $C_0 = \dfrac{\varepsilon_0 A}{d}$ である。いま，極板に電荷 $+Q$ と $-Q$ を与えられて，系は力のつり合いを保っている。

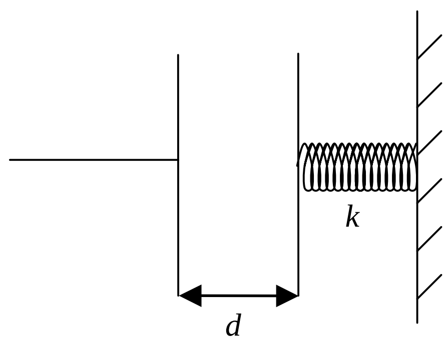

図 1

1.1	このとき，極板間にはたらく電気力の大きさ F_E を求めよ。	0.8

1.2	このとき，極板に電荷がないときに比べ，バネの付いた極板の変位 x を求めよ。	0.6

1.3	この状態で，コンデンサーの極板間の電位差 V を，Q, A, d，k，ε_0 を用いて表せ。	0.4

1.4	この状態でのコンデンサーの電気容量 C は，(電荷)/(電圧)で定義される。C/C_0 を，Q, A, d，k，ε_0 のを用いて表せ。	0.3

1.5	この系に蓄えられた全エネルギー U を，Q, A, d, k, ε_0 を用いて表せ。	0.6

図 2 では，質量 M の物体は質量の無視できる導電性極板と接続し，さらに自然長が等しく，かつ等しい弾性定数 k をもつ 2 つのバネに接続されている。この導電性極板は，他に固定された 2 枚の導電性極板間を，固定された極板と平行

を保ちながら左右に動くことができる。これら３つの極板は同じ極板面積Aをもち，３つの極板は２つのコンデンサーを構成している。図２に示すように，固定された２つの極板には，電位 Vと$-V$が与えられ，真ん中の極板は，スイッチαまたはβにつなぐことができる。可動極板につながった導線は極板の動きを妨げることはない。装置全体が加速されていないとき，可動極板はそれぞれの固定極板から共に距離dの位置にあり，固定極板と可動極板との距離は極板の大きさに対して十分小さい。はじめ可動極板の全電荷は 0 であり，その厚さは無視できる。

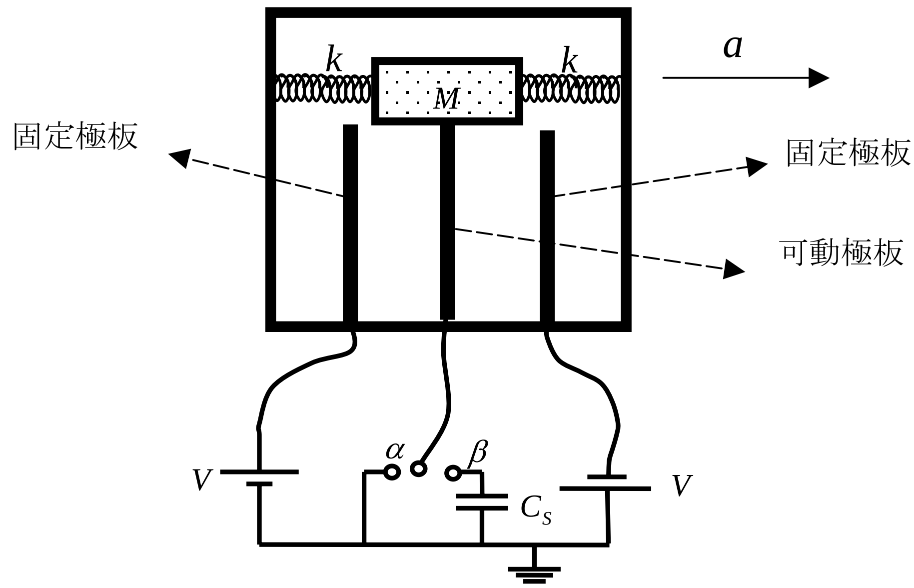

図 2

この可動極板がつくるコンデンサーを含む装置は乗用車と共に加速され，その加速度は一定であるとする。また，この一定の加速度で加速される間，バネは振動せず，このコンデンサーを含む装置はつり合いの状態にあるものとする。すなわち，この装置の各部分は，相対的に静止し，乗用車に対しても静止している。加速により，可動極板は，2 枚の固定極板の中心の位置からxだけ変位している。

２　スイッチがαの位置に入っている場合，すなわち，可動極板が接地されている場合を考えよう。

2.1	左右のコンデンサーに蓄えられる電荷Q_1，Q_2を，xの関数として求めよ。	0.4

2.2	可動極板にはたらく静電気力の合力F_Eを，xの関数として求めよ。	0.4

2.3	$d >> x$ とみなし，x^2 の項が d^2 の項に比べて無視できるとする。前問の答を簡単化せよ。	0.2

2.4	可動極板にはたらくすべての力（静電気力とバネの復元力の和）を $-k_{eff}x$ と書いたとき，k_{eff} を求めよ。	0.7

2.5	一定の加速度 a を，x の関数として表せ。	0.4

３　次に，スイッチが β の位置に入っている場合を考える。すなわち可動極板が電気容量 C_S のコンデンサー（初めに充電していない）を通じて接地されているとする。

可動極板の中央からの変位を x として以下に答えよ。

3.1	コンデンサー C_S の極板間電位差 V_S を x の関数として求めよ。	1.5

3.2	$d >> x$ とみなし，x^2 の項が d^2 の項に比べて無視できるとする。このとき，前問の答を簡単化せよ。	0.2

4　この問題で出てくる変数を調整して，エアバッグが通常のブレーキの状態では作動せずに衝突のときには速く開いて運転者の頭部が前窓やハンドルに衝突することがないようにしたい。**2** でみたように，２つのバネと電荷によって可動板にはたらく力は，有効バネ定数 k_{eff} である１つのバネによる力のように置き換えることができる。コンデンサー全体のシステムは，質量 M の物体とバネ定数 k_{eff} のバネが，一定の重力加速度 a の影響のもとにある場合と似ている。ただし，この場合の a は，重力加速度ではなく，乗用車の加速度である。

注意：ここでは，「質量 M の物体とバネとが一定の加速度のもとでつり合いの状態にある，すなわち，乗用車に対して物体とバネが静止している」という仮定は，もはや成り立たない。

摩擦力を無視し，問題で与えられているパラメータについては，以下の数値データを考慮せよ。

$d = 1.0\,\mathrm{cm}$，　$A = 2.5\times10^{-2}\,\mathrm{m}^2$，　$k = 4.2\times10^{3}\,\mathrm{N/m}$，　$\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}\,\mathrm{C^2/Nm^2}$，
$V = 12\,\mathrm{V}$，$M = 0.15\,\mathrm{kg}$.

4.1	上記の数値データを用いて，設問 2.3 で計算した電気力とバネの力との比を求め，バネの力に対して電気力が無視できることを示せ。	0.6

スイッチが β に接続されている場合について電気力を計算してはいないが，その場合も電気力は小さく無視できるということを全く同じように示すことができる。

4.2	もし乗用車が一定速度で走行しているときに，一定加速度aで急停車した場合，可動極板の最大変位はどれだけになるか？　答は上で示された変数を用いて表せ（数値を計算する必要はない）。	0.6

スイッチがβに接続されているとする。また，コンデンサーにかかる電圧が$V_S = 0.15\mathrm{V}$に達したときにエアバッグが作動するように系全体がデザインされているとする。乗用車の加速度が重力加速度$g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$に達しないような通常の状況でエアバックが作動しないようにしたい。

4.3	そのためには，C_Sはいくらであればよいか。	0.6

エアバッグが速く作動することによって運転者の頭部が前窓やハンドルにぶつからないようにしたい。乗用車の衝突の結果，乗用車はgと等しい減速をするが，運転者の頭部は一定速度で動き続けるとする。

4.4	通常の乗用車での運転者の頭部とハンドルの間の距離を見積もり，運転者の頭部がハンドルにぶつかるまでの時間t_1を求めよ。	0.8

4.5	エアバッグが作動するまでの時間t_2を求めよ。t_1と比較することによって，エアバッグの作動は間に合うか，答えよ。ただし，エアバッグは，コンデンサーの電圧が$V_S = 0.15\mathrm{V}$に達すると瞬間的に開くものとする。	0.9

Blue

物理学では，等式の関係式（方程式）があるときには，その両辺は同じ種類の物理量，すなわち，同じ次元をもつ量でなければならない。例えば，方程式の右辺の物理量が長さを表し，左辺の物理量が時間を表すというような状況はあってはならない。この事実を用いると，問題を解析的に解くことをしなくても，物理学の関係式をおおよそ導くことができる。例えば，一定の重力加速度gのもとで高さhのところから物体が落下するのに要する時間を論じるには，量gとhを用いて時間を表す量を組み立てるだけで十分であり，それを満たすのは$T = a(h/g)^{1/2}$以外にないのである。この答に含まれるaは未定の係数である。aは無次元量であってこの方法だけでは決定することはできない。この係数は実数で，1, $1/2$, $\sqrt{3}$, π, などあらゆる可能性がある。このようにして物理的関係式をもとめる方法は「次元解析」と呼ばれる。次元解析では，無次元の係数は重要ではないので，それを書く必要はない。うまいことに，大部分の物理学の問題では，この係数は1程度の量であるから，それを省略しても，物理量の大きさの程度が変わることはない。したがって，上記の問題に次元解析を適用すると，$T = (h/g)^{1/2}$が得られる。

一般には，物理量の次元は，M（質量），L（長さ），T（時間），K（温度）という四つの基本量の次元によって表される。任意の量xの次元は，$[x]$で表される。例として，速度v，運動エネルギーE_k，熱容量C_Vの次元を表すと，$[v] = LT^{-1}$, $[E_k] = ML^2T^{-2}$, $[C_V] = ML^2T^{-2}K^{-1}$となる。

1　基本定数と次元解析

1.1	物理学の基本定数の次元を求めよ。すなわち，プランク定数h，光速c，万有引力定数G，ボルツマン定数k_Bの次元をそれぞれ，長さ，質量，時間，温度の次元で表せ。	0.8

シュテファン=ボルツマンの法則によれば，黒体の表面の単位面積から単位時間に放射されるエネルギーは黒体放射強度と呼ばれ，$\sigma\theta^4$に等しい。ここで，σは「シュテファン=ボルツマン定数」と呼ばれ，θは黒体の絶対温度である。

1.2	シュテファン=ボルツマン定数の次元を，長さ，質量，時間，温度の次元を用いて表せ。	0.5

シュテファン=ボルツマンの定数は基本定数ではなく，基本定数の組合わせによって表すことができる。すなわち，$\sigma = a h^\alpha c^\beta G^\gamma k_B^{\ \delta}$と書くことができる。この関係式で$a$の値はわれわれの観点からは重要ではないので，1とおくことにしよう。

1.3	次元解析を用いて，$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を求めよ。	1.0

2　ブラックホールの物理

ここでは，次元解析でブラックホールの性質のいくつかを求めてみよう。「無毛仮設」と呼ばれる物理学の定理によると，今考えているブラックホールの特性のいくつかは，ブラックホールの質量だけによって決まる。ブラックホールの特性の一つは，「事象の地平」の面積である。大まかにいうと，事象の地平とはブラックホールの境界のことである。この境界の内側では重力があまりにも強いので，境界の内側から光は出ることができない。

ブラックホールの質量 m と事象の地平の面積 A との関係を求めよう。この事象の地平の面積はブラックホールの質量，光速，万有引力定数に依存する。設問 1.3 のように $A = G^{\alpha} c^{\beta} m^{\gamma}$ と書くことにする。

2.1	次元解析を用いて α, β, γ を求めよ。	0.8

この結果から，ブラックホールの事象の地平の面積はブラックホールの質量の増加とともに増加することが明らかになる。古典的な観点からは，ブラックホールからは何も出て来ないので，すべての物理過程において質量は増加し，事象の地平の面積は増加するだけである。熱力学の第二法則との類推から，ベーケンシュタインは，ブラックホールのエントロピーは，その事象の地平の面積に比例するということを提案した。すなわち，エントロピー S に対して，$S = \eta A$ とした。この推測は，他の議論からももっともらしいと考えられるようになった。

2.2	熱力学ではエントロピー S は，その変化分 dS についての関係式 $dS = dQ/\theta$ によって定義される。ここで，dQ は流入する熱量であり，θ はその系の絶対温度である。この定義を用いて，エントロピーの次元を求めよ。	0.2

2.3	設問 1.3 と同様に，次元をもつ量 η を基本定数 h, c, G, k_B を用いて表せ。	1.1

以下の節では，次元解析を用いないこと。しかし，これまで得られた結果を用いてもよい。

3　ホーキング放射

半量子論的方法によって，ホーキングは，放射が無いとする古典的な観点とは反対に，ブラックホールは，「ホーキング温度」と呼ばれる温度における黒体放射と同じように放射をしていると考えた。これから考えるモデルでは，ブラックホールは外界に対して仕事をしない黒体であると仮定している。

3.1	ブラックホールのエネルギーを質量で与える式$E = mc^2$と熱力学の法則（第一法則とエントロピーと熱との関係）より，ブラックホールのホーキング温度θ_Hを，ブラックホールの質量と基本定数を用いて表せ。ブラックホールは周囲に対して仕事をしないものとする。	0.8

3.2	孤立したブラックホールの質量は，ホーキング放射によって，変化する。シュテファン=ボルツマンの法則を用いて，ブラックホールの単位時間あたりの質量変化がホーキング温度θ_Hにどのように依存するかを求め，それをブラックホールの質量と基本定数によって表せ。	0.7

3.3	質量mの孤立したブラックホールが完全に蒸発するまで，すなわち質量を失うまでにかかる時間t^*を求めよ。	1.1

熱力学の観点から，ブラックホールはある奇妙な挙動を示す。例えば，ブラックホールの熱容量は負となる。

3.4	質量mのブラックホールの熱容量を求めよ。	0.6

4　ブラックホールと宇宙の背景放射

ブラックホールが宇宙の背景放射にさらされているとする。宇宙の背景放射は，温度θ_Bの黒体放射であり，全宇宙に広がっている。面積Aをもつ物体は，単位時間に$\sigma\theta_B{}^4 \times A$のエネルギーを受け取る。したがって，ブラックホールはホーキング放射によってエネルギーを失うが，宇宙の背景放射からエネルギーを受け取る。

4.1	ブラックホールの単位時間あたりの質量変化（質量の時間微分）を，ブラックホールの質量，宇宙の背景放射の温度，基本定数を用いて表せ。	0.8

4.2	ある質量m^*でこの質量変化はゼロとなり，熱平衡状態が実現する。このときのm^*を求め，θ_Bと基本定数を用いて表せ。	0.4

4.3	設問 4.2 の解をθ_Bについて解き，設問 4.1 の解のθ_Bに代入し，ブラックホールの単位時間あたりの質量変化（質量の時間微分）をm, m^*と基本定数で表せ。	0.2

4.4	宇宙の背景放射と熱平衡にあるブラックホールのホーキング温度を求めよ。	0.4

4.5	この熱平衡状態は安定か不安定か？　その理由は？（その理由を数式を用いて述べよ）	0.6

Pink

二つの恒星がそれらの共通の重心の周りを回る場合，連星と言う。われわれの銀河系の星のうちほぼ半分が連星である。しかし，地球から見ると，これらの連星の性質を調べることは簡単ではない。なぜなら，連星を形成する二つの星の間の距離は地球からの距離と比べて非常に小さく，望遠鏡で二つの星を見分けることができないからである。したがって，それが果たして連星であるかどうかを見極めるためには，光度測定あるは分光測定によって特定の星の光の強度の変動あるいはスペクトルの変動を観測しなければならない。

連星の光度測定

二つの星が運動する平面上に，ほぼ，われわれがいるとすると，われわれの観測地点（地球）から見て，連星のうちの一方の星は他方の星の前を，お互いにある時間ごとに横切るので，連星系全体の光の強さが時間とともに変化する。このような連星は食連星（食変光星）と呼ばれる。

1　二つの星が一定の角速度ωでそれらの共通の重心のまわりを円軌道で運動していて，われわれは，正確に連星系の運動する平面上にいるものとする。また，それぞれ星の表面温度（絶対温度）はT_1とT_2 $(T_1 > T_2)$ であり，半径はそれぞれR_1とR_2 $\left(R_1 > R_2\right)$であるとする。地球上で測定された連星系からの光の強さが時間の関数として図 1 にプロットされている。図 1 で示されている 2 種類の極小値は，それぞれ，連星系からの光の最大光度I_0 $\left(I_0 = 4.8\times10^{-9}\ \mathrm{W/m^2}\right)$の 90%と 63%である。図 1 における縦軸は比率I/I_0を示し，横軸は「日」単位である。

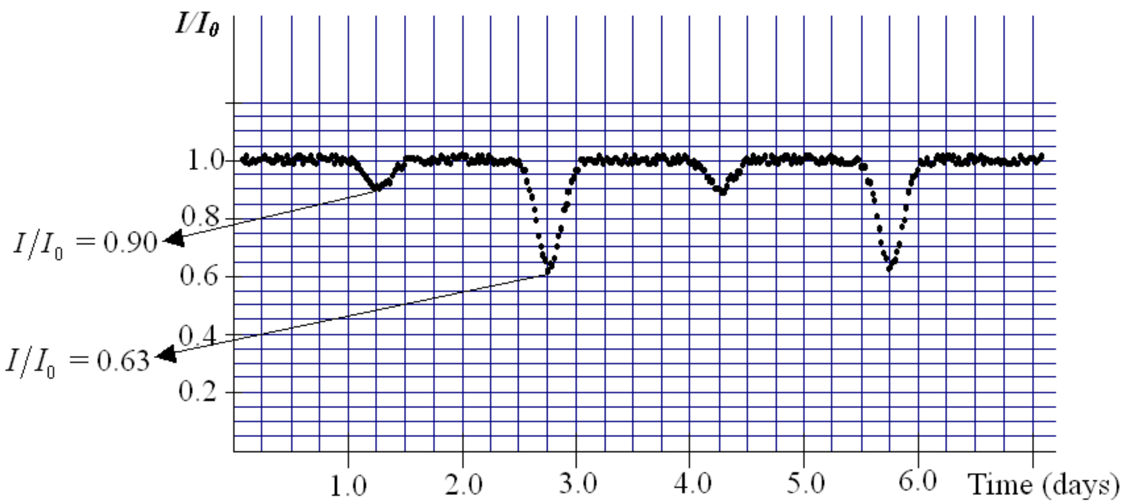

図 1. 観測された連星の相対的光度と時間の関係
縦軸は$I_0 = 4.8\times10^{-9}\ \mathrm{W/m^2}$　を基準にした光の強さ。時間の単位は日。

(配点)

1.1	この重心のまわりの円運動の周期(s) を求めよ。また，その角速度(rad/s)はいくらか？　これらは，いずれも有効数字２桁で答えよ。	0.8

星からの放射は，星の半径と等しい半径をもつ平らな円板からの均一な黒体放射であると近似できる。したがって，Aをその円板の面積，Tを星の表面温度とすると，星から受け取る単位面積，単位時間あたりのエネルギーは，AT^4に比例する。

1.2	図 1 を用いて，温度の比T_1/T_2と半径の比R_1/R_2を，有効数字２桁で求めよ。	1.6

連星の分光測定

この節では，連星系の分光データを用いて連星の天文学的な性質を計算しよう。

原子は，原子ごとの特徴的な波長の光を放射・吸収する。観測される星のスペクトルには，星の大気中の原子による吸収線がある。ナトリウムのスペクトルには，波長5895.9 Å（10 Å＝1 nm）の特徴的な黄色の線スペクトル（D_1線）がある。前節で考えた連星系で，この波長のナトリウム原子の吸収線を調べた。連星から得られる光のスペクトルは，星が地球に対して運動していることによるドップラー効果の影響を受ける。連星の各星は異なる速さで動いているので，吸収線の波長は，それぞれの星でドップラー効果により異なる量だけシフトする。星の速さは光速に比べて十分に遅いので，ドップラー効果によるシフトを観測するには，精度の高い波長測定が必要である。この問題で考える連星の重心の速さは，それぞれの星の軌道速度（円運動している速さ）に比べて十分小さい。それゆえ，すべてのドップラー効果によるシフトは，星の軌道速度に起因する。表 1 は，連星系を構成している星の，地球で観測したD_1線の測定スペクトルの時間変化である。

表 1: ナトリウム **D_1** 線についての連星の吸収線スペクトル

t/days	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1	2.4
λ_1 (Å)	5897.5	5897.7	5897.2	5896.2	5895.1	5894.3	5894.1	5894.6
λ_2 (Å)	5893.1	5892.8	5893.7	5896.2	5897.3	5898.7	5899.0	5898.1
t/days	2.7	3.0	3.3	3.6	3.9	4.2	4.5	4.8
λ_1 (Å)	5895.6	5896.7	5897.3	5897.7	5897.2	5896.2	5895.0	5894.3
λ_2 (Å)	5896.4	5894.5	5893.1	5892.8	5893.7	5896.2	5897.4	5898.7

2 表１を用いて考える。

2.1	v_1 と v_2 は，それぞれの星の軌道速度の大きさとする。v_1 と v_2 を有効数字２桁で求めよ。真空中の光速度を $c = 3.0\times10^8$ m/s とする。ただし，相対論的効果は無視せよ。	1.8
2.2	これらの星の質量比 (m_1/m_2) を有効数字２桁で求めよ。	0.7
2.3	r_1 と r_2 はこれらの星の共通の重心からのそれぞれの距離である。r_1 と r_2 を有効数字２桁で求めよ。	0.8
2.4	r は，二つの星の間の距離である。r を有効数字２桁で求めよ。	0.2

3 ２つの星の間に働く力は，万有引力だけである。

3.1	それぞれの星の質量を有効数字１桁で求めよ。 万有引力定数は，$G = 6.7\times10^{-11}\ \mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$ である。	1.2

星の一般的特性

4 ほとんどの星が同じメカニズムでエネルギーを生成する。このことから，星の質量 M とその輝度 L（すなわち，その星の単位時間の全放射エネルギー）との間に経験的関係式がある。この関係式は $L/L_{Sun} = (M/M_{Sun})^{\alpha}$ という「ベキ乗則」で表される。ここで，$M_{Sun} = 2.0\times10^{30}$ kg は太陽の質量であり，$L_{Sun} = 3.9\times10^{26}$ W は太陽の輝度である。この関係式は両対数グラフで図２のようになる。

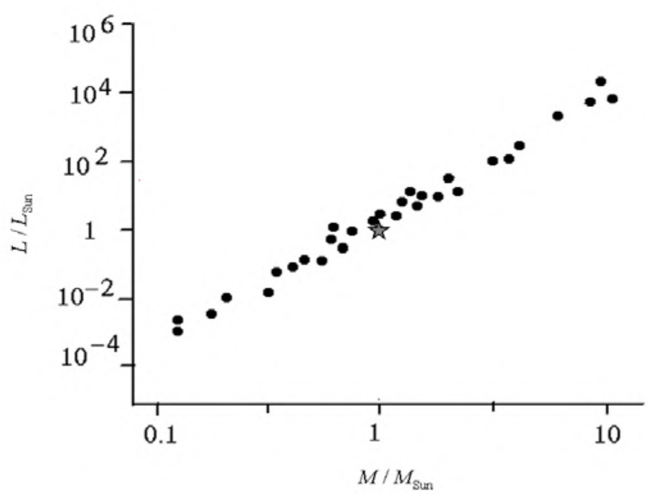

図 2. 星の輝度と質量の関係 星の輝度と質量の関係は上記のベキ乗則にしたがい，図では両対数グラフで表されているので直線状である。星印は太陽を表し，質量は 2.0×10^{30} kg で輝度は 3.9×10^{26} W である。

4.1	グラフから，ベキの指数αを有効数字 1 桁で求めよ。	0.6

4.2	L_1とL_2は，前節で述べた連星のそれぞれの星の輝度を表す。L_1，L_2を有効数字 1 桁で求めよ。	0.6

4.3	連星と地球の間の距離dを有効数字 1 桁で光年で表すといくらか？その距離を求めるために，図 1 で与えた数値を用いよ。1 光年は光が 1 年の間に進む距離である。	0.9

4.4	地球からみて，二つの星の視差（二つの星の方向がなす角度）θは最大いくらか？　有効数字 1 桁で求めよ。	0.4

4.5	これらの星を二つと見分けられる最小の望遠鏡の口径Dはいくらか。有効数字 1 桁で求めよ。	0.4