【解答】

1.1) 極板間の電場の強さは，ガウスの法則を用いて，

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

電荷Q，面積Aの極板上の電荷密度は，

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

平行極板間の電場は，各極板のつくる電場の和であり，１つの極板上の電荷は，他の極板のつくる強さ$\frac{1}{2}E$の電場から電気力を受ける。それゆえ，

$$F_E = \frac{1}{2}EQ = \underline{\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}}$$

1.2) 変位xにおけるバネの弾性力は，

$$F_m = -kx$$

前問 1.1 で求めた電気力と弾性力のつり合い$F_m = F_E$より，

$$\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A} - kx = 0 \quad \therefore \quad x = \underline{\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A k}}$$

1.3) 極板間の電位差Vは，電場Eを用いて，

$$V = E(d - x)$$

問 1.1，1.2 で求めた結果を代入して，

$$V = \underline{\frac{Qd}{\varepsilon_0 A}\left(1 - \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A k d}\right)}$$

1.4) コンデンサーの電気容量Cは,

$$C = \frac{Q}{V}$$

であるから，前問 1.3 の結果を用いて，

$$\frac{C}{C_0} = \underline{\left(1 - \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A k d}\right)^{-1}}$$

1.5) ばねに蓄えれた弾性エネルギーは,

$$U_m = \frac{1}{2}kx^2$$

コンデンサー蓄えられた静電エネルギーは,

$$U_E = \frac{Q^2}{2C}$$

それゆえ，蓄えられた全エネルギーは,

$$U = U_m + U_E = \underline{\frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 A}\left(1 - \frac{Q^2}{4\varepsilon_0 A k d}\right)}$$

2.1) 位置 x で各コンデンサーに蓄えられた電気量は,

$$Q_1 = C_1 V = \underline{\frac{\varepsilon_0 A V}{d - x}}$$

$$Q_2 = C_2 V = \underline{\frac{\varepsilon_0 A V}{d + x}}$$

2.2) 問 1.1 の結果より，各極板間に作用する力は,

$$F_1 = \frac{{Q_1}^2}{2\varepsilon_0 A}$$

$$F_2 = \frac{{Q_2}^2}{2\varepsilon_0 A}$$

これら 2 力は，可動極板に逆向きに作用するから,

$$F_E = F_1 - F_2 , \qquad \therefore \quad F_E = \underline{\frac{\varepsilon_0 A V^2}{2}\left(\frac{1}{(d-x)^2} - \frac{1}{(d+x)^2}\right)}$$

2.3) x^2 以上の項を落として,

$$F_E = \underline{\frac{2\varepsilon_0 A V^2}{d^3}}x$$

2.4) 同じバネ定数 k をもつ 2 つのバネによる弾性力は,

$$F_m = -2kx$$

バネの弾性力と電気力が逆向きになることに注意して,

$$F = F_m + F_E \qquad \therefore \quad F = -2\left(k - \frac{\varepsilon_0 A V^2}{d^3}\right)x$$

これより,

$$k_{eff} = \underline{2\left(k - \frac{\varepsilon_0 A V^2}{d^3}\right)}$$

2.5) 可動極板の運動方程式は,

$$F = Ma$$

であり，合力 F に前問 2.4 の結果を代入して,

$$\underline{a = -\frac{2}{M}\left(k - \frac{\varepsilon_0 A V^2}{d^3}\right)x}$$

3.1) ２つの閉回路に対するキルヒホッフの法則，および，回路の全電荷が 0 であることより,

$$\begin{cases} \dfrac{Q_S}{C_S} + V - \dfrac{Q_2}{C_2} = 0 \\ -\dfrac{Q_S}{C_S} + V - \dfrac{Q_1}{C_1} = 0 \\ Q_2 - Q_1 + Q_S = 0 \end{cases}$$

$V_S = \dfrac{Q_S}{C_S}$ であることに注意して,

$$V_S = V\frac{\dfrac{2\varepsilon_0 A x}{d^2 - x^2}}{C_S + \dfrac{2\varepsilon_0 A d}{d^2 - x^2}}$$

3.2) x^2 の項を無視して,

$$V_S = \underline{V\frac{2\varepsilon_0 A x}{d^2 C_S + 2\varepsilon_0 A d}}$$

4.1) 電気力と弾性力の比は,

$$\frac{F_E}{F_m} = \underline{\frac{\varepsilon_0 A V^2}{k d^3}}$$

数値を代入して,

$$\frac{F_E}{F_m} = \underline{7.6\times10^{-9}}$$

この結果から，弾性力に比べて電気力が無視できることがわかる。

4.2) 可動極板に作用する力は，バネの弾性力のみとみなすことができるから,

$$F = 2k\,x$$

単振動する可動極板の振動中心の位置は，慣性力 Ma が作用したときのつり合いの位置だから，

$$x = \frac{Ma}{2k}$$

最大変位は，

$$x_{\max} = 2x = \underline{\frac{Ma}{k}}$$

4.3) 加速度が

$$a = g$$

最大変位は，

$$x_{\max} = \frac{M\,g}{k}$$

さらに，問 3.2 の結果へ代入して，

$$V_S = V\,\frac{2\varepsilon_0 A\,x_{\max}}{d^2 C_S + 2\varepsilon_0 A\,d}$$

このとき，$V_S = 0.15\ \mathrm{V}$ となればよいから，

$$C_S = \frac{2\varepsilon_0 A}{d}\left(\frac{V\,x_{\max}}{V_S\,d} - 1\right) = \underline{8.0\times10^{-11}\ \mathrm{F}}$$

4.4) 運転者の頭とハンドルの距離 l を，

$$l = 0.4\,\mathrm{m}〜1\,\mathrm{m}$$

と見積もる。大きな加速度がかかり始める瞬間，運転者の乗用車に対する相対初速度は 0 であるから，

$$l = \frac{1}{2}g\,t_1^{\,2} \quad \therefore \quad t_1 = \sqrt{\frac{2l}{g}}$$

これより，　$t_1 = \underline{0.3〜0.5\ \mathrm{s}}$

4.5) 求める時間 t_2 は，単振動の周期の半分であるから，

$$t_2 = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{M}{2k}} = \underline{0.013\ \mathrm{s}}$$

$t_1 > t_2$ だから，エアーバッグが作動するのに間に合う。

【解答】

1.1) I) 光子のエネルギーの式より,

$$h\nu = E \quad \Rightarrow \quad [h][\nu] = [E] \quad \Rightarrow \quad [h] = [E][\nu]^{-1} = \underline{ML^2T^{-1}}$$

II) $[c] = \underline{LT^{-1}}$

III) $F = \dfrac{Gmm}{r^2} \quad \Rightarrow \quad [G] = [F][r^2][m]^{-2} = \underline{M^{-1}L^3T^{-2}}$

IV) $E = k_B\theta \quad \Rightarrow \quad [k_B] = [\theta]^{-1}[E] = \underline{ML^2T^{-2}K^{-1}}$

1.2) シュテファン＝ボルツマンの法則より，単位面積，単位時間あたりのエネルギー$=\sigma\theta^4$と書けるから,

$$[E]L^{-2}T^{-1} = [\sigma]K^4 \Rightarrow [\sigma] = \underline{MT^{-3}K^{-4}}$$

1.3) シュテファン＝ボルツマン定数は，数値的な定数を除いて$\sigma = h^\alpha c^\beta G^\gamma {k_B}^\delta$と表すことができる。そこで，$\alpha, \beta, \gamma, \delta$を次元解析で決めよう。

$[\sigma] = [h]^\alpha [c]^\beta [G]^\gamma [k_B]^\delta$であり，$[\sigma] = MT^{-3}K^{-4}$であるから,

$$MT^{-3}K^{-4} = \left(ML^2T^{-1}\right)^\alpha \left(LT^{-1}\right)^\beta \left(M^{-1}L^3T^{-2}\right)^\gamma \left(ML^2T^{-2}K^{-1}\right)^\delta = M^{\alpha-\gamma+\delta}L^{2\alpha+\beta+3\gamma+2\delta}T^{-\alpha-\beta-2\gamma-2\delta}K^{-\delta}$$

これより,

$$\begin{cases} \alpha - \gamma + \delta = 1 \\ 2\alpha + \beta + 3\gamma + 2\delta = 0 \\ -\alpha - \beta - 2\gamma - 2\delta = -3 \\ -\delta = -4 \end{cases} \quad \Rightarrow \underline{\begin{cases} \alpha = -3 \\ \beta = -2 \\ \gamma = 0 \\ \delta = 4 \end{cases}} \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{{k_B}^4}{c^2h^3}$$

2.1) 事象の地平の面積Aは，古典的な相対論的重力理論（一般相対論）から，ブラックホールの質量mを用いて計算される。一般相対論では，特殊相対論の特徴的な定数である光速cと，重力の特徴的な定数である万有引力定数Gが組み合わされる。ただし，量子論の特徴的な 定数であるプランク定数hにはよらない。そこで,

$$A = G^\alpha c^\beta m^\gamma$$

と書くことができる。

次元解析を実行すると,

$$[A] = [G]^\alpha [c]^\beta [m]^\gamma \quad \Rightarrow \quad L^2 = \left(M^{-1}L^3T^{-2}\right)^\alpha \left(LT^{-1}\right)^\beta M^\gamma = M^{-\alpha+\gamma}L^{3\alpha+\beta}T^{-2\alpha-\beta}$$

となる。これより,

$$\begin{cases} -\alpha+\gamma=0 \\ 3\alpha+\beta=2 \\ -2\alpha-\beta=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{\begin{cases} \alpha=2 \\ \beta=-4 \\ \gamma=2 \end{cases}} \quad \therefore \quad A=\frac{m^2G^2}{c^4}$$

2.2) エントロピーの定義 $dS=\dfrac{dQ}{\theta}$ より， $[S]=[E][\theta]^{-1}=\underline{ML^2T^{-2}K^{-1}}$

2.3) $\eta=S/A$ であることから，

$$\begin{cases} [\eta]=[S][A]^{-1}=MT^{-2}K^{-1} \\ [\eta]=[G]^{\alpha}[h]^{\beta}[c]^{\gamma}[k_B]^{\delta}=M^{-\alpha+\beta+\delta}L^{3\alpha+2\beta+\gamma+2\delta}T^{-2\alpha-\beta-\gamma-2\delta}K^{-\delta} \end{cases}$$

となる。これより，

$$\begin{cases} -\alpha+\beta+\delta=1 \\ 3\alpha+2\beta+\gamma+2\delta=0 \\ -2\alpha-\beta-\gamma-2\delta=-2 \\ \delta=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=-1 \\ \beta=-1 \\ \gamma=3 \\ \delta=1 \end{cases} \quad \therefore \quad \eta=\underline{\frac{c^3k_B}{Gh}}$$

3.1) 熱力学第 1 法則は $dE=dQ+dW$ と書ける。題意より， $dW=0$ であり，エントロピーの定義式 $dS=\dfrac{dQ}{\theta}$ より，

$$dE=\theta_H dS+0$$

$\begin{cases} S=\dfrac{Gk_B}{ch}m^2 \\ E=mc^2 \end{cases}$ を用いて， $\theta_H=\dfrac{dE}{dS}=\left(\dfrac{dS}{dE}\right)^{-1}=c^2\left(\dfrac{dS}{dm}\right)^{-1}$ となるから，

$$\theta_H=\underline{\left(\frac{1}{2}\right)\frac{c^3h}{Gk_B}\frac{1}{m}}$$

3.2) シュテファン＝ボルツマンの法則は，単位時間に単位面積から放射されるエネルギーを与える。 $E=mc^2$ および，問 1.3)，2.1)，3.1)の結果より，

$$\begin{cases} dE/dt=-\sigma\theta_H{}^4A \\ \sigma=\dfrac{k_B{}^4}{c^2h^3} \\ A=\dfrac{m^2G^2}{c^4} \\ E=mc^2 \end{cases} \quad \therefore \quad c^2\frac{dm}{dt}=-\frac{k_B{}^4}{c^2h^3}\left(\frac{1}{2}\frac{c^3h}{Gk_B}\frac{1}{m}\right)^4\frac{m^2G^2}{c^4}$$

これより，
$$\frac{dm}{dt}=-\frac{1}{16}\frac{c^4h}{G^2}\frac{1}{m^2}$$

3.3) 積分して，

$$\frac{dm}{dt}=-\frac{1}{16}\frac{c^4h}{G^2}\frac{1}{m^2} \quad \Rightarrow \int m^2 dm=-\int\frac{c^4h}{16G^2}dt \quad \Rightarrow m^3(t)-m^3(0)=-\frac{3c^4h}{16G^2}t$$

$t=t^*$ でブラックホールが完全に消滅するとして，

$$m(t^*)=0 \qquad \therefore \quad t^*=\frac{16G^2}{3c^4h}m^3$$

3.4) 熱容量 C_V は，温度（＝ホーキング温度）θ（＝θ_H）が変化するときのエネルギー E の変化で与えられる。

$$\begin{cases} C_V=\dfrac{dE}{d\theta} \\ E=mc^2 \\ \theta=\theta_H=\dfrac{c^3h}{2Gk_B}\dfrac{1}{m} \end{cases} \qquad \text{よって，} \qquad C_V=-\frac{2Gk_B}{ch}m^2$$

4.1) シュテファン＝ボルツマンの法則より，ブラックホールが単位表面積あたり単位時間に失うエネルギーと，背景放射から単位表面積あたり単位時間に得るエネルギーが与えられる。よって，

$$\begin{cases} \dfrac{dE}{dt}=-\sigma\theta^4A+\sigma{\theta_B}^4A \\ E=mc^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{dm}{dt}=-\frac{hc^4}{16G^2}\frac{1}{m^2}+\frac{G^2}{c^8h^3}(k_B\theta_B)^4m^2$$

4.2) $\dfrac{dm}{dt}=0$ より，
$$-\frac{hc^4}{16G^2}\frac{1}{m^{*2}}+\frac{G^2}{c^8h^3}(k_B\theta_B)^4m^{*2}=0$$

よって，
$$m^*=\frac{c^3h}{2Gk_B}\frac{1}{\theta_B}$$

4.3) $\theta_B=\dfrac{c^3h}{2Gk_B}\dfrac{1}{m^*}$ を設問 4.1)の結果に代入して，

$$\frac{dm}{dt}=-\frac{hc^4}{16G^2}\frac{1}{m^2}\left(1-\frac{m^4}{m^{*4}}\right)$$

4.4) 背景放射と熱平衡にあるときの温度（ホーキング温度）をθ^*とすると，

$$\frac{dE}{dt}=-\sigma\left({\theta^*}^4-{\theta_B}^4\right)A=0 \quad \therefore \quad \theta^*=\underline{\theta_B}$$

4.5) 設問 4.3)の結果より，

$$m>m^* \;\Rightarrow\; \frac{dm}{dt}>0 \quad \text{また，} \quad m<m^* \;\Rightarrow\; \frac{dm}{dt}<0$$

これより，質量mがm^*から少しでも外れると，つねにm^*から離れる方向へ変化するから，$m=m^*$の熱平衡の状態は<u>不安定</u>であることがわかる。

【解答】

1.1) 周期 = 3.0 日 = $\underline{2.6\times10^5\,\mathrm{s}}$.

周期 = $\dfrac{2\pi}{\omega}$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\omega = 2.42\times10^{-5} \fallingdotseq \underline{2.4\times10^{-5}\,\mathrm{rad\ s^{-1}}}$.

1.2) 図 1 の極小値を読みとって，$I_1/I_0 = \alpha = 0.90$ ，および，$I_2/I_0 = \beta = 0.63$

ここで，k を比例定数として，$I_0 = k(\pi R_1^2 T_1^4 + \pi R_2^2 T_2^4)$，$I_1 = k\pi R_1^2 T_1^4$，

$I_2 = k\{\pi(R_1^2 - R_2^2)T_1^4 + \pi R_2^2 T_2^4\}$ と書けるから，

$$\frac{I_0}{I_1} = 1 + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4 = \frac{1}{\alpha}$$

$$\frac{I_2}{I_1} = 1 - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \left(1 - \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4\right) = \frac{\beta}{\alpha}$$

この結果から，

$$\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{\alpha}{1-\beta}} \ \Rightarrow\ \frac{R_1}{R_2} = \underline{1.6}, \quad \frac{T_1}{T_2} = \sqrt[4]{\frac{1-\beta}{1-\alpha}} \ \Rightarrow\ \frac{T_1}{T_2} = \underline{1.4}$$

2.1) ドップラー効果の式より，

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \cong \frac{v}{c} \text{ (あるいは，これと同等の関係式)}$$

最大および最小の波長は: $\lambda_{1,\max} = 5897.7$ Å , $\lambda_{1,\min} = 5894.1$ Å

$\lambda_{2,\max} = 5899.0$ Å , $\lambda_{2,\min} = 5892.8$ Å

最大および最小の波長差は: $\Delta\lambda_1 = 3.6$ Å ，$\Delta\lambda_2 = 6.2$ Å

波長差は円軌道の速度の 2 倍になることに注意して，ドップラー効果の関係式より，

$$v_1 = c\frac{\Delta\lambda_1}{2\lambda_0} = 9.16\times10^4 \fallingdotseq \underline{9.2\times10^4\ \mathrm{m/s}}$$

$$v_2 = c\frac{\Delta\lambda_2}{2\lambda_0} = 1.58\times10^5 \fallingdotseq \underline{1.6\times10^5\ \mathrm{m/s}}$$

2.2) 題意より，重心の速度は無視できるので，運動量保存則より，

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{v_2}{v_1} = \underline{1.7}$$

2.3) $r_i = \dfrac{v_i}{\omega}$ （$i = 1,2$）であるから，

$$r_1 = \underline{3.8\times10^9\ \mathrm{m}}\,,\quad r_2 = \underline{6.5\times10^9\ \mathrm{m}}$$

2.4)

$$r = r_1 + r_2 = \underline{1.0\times10^{10}\ \mathrm{m}}$$

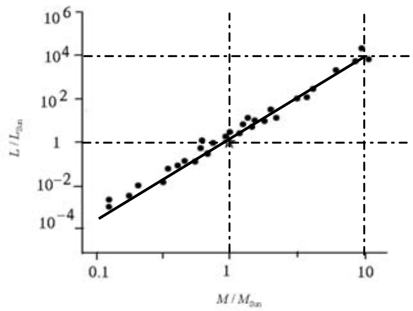
3.1)円運動の運動方程式より，

$$G\frac{m_1 m_2}{r^2} = m_1\frac{v_1{}^2}{r_1} = m_2\frac{v_2{}^2}{r_2}$$

それゆえ，

$$\begin{cases} m_1 = \dfrac{r^2 v_2{}^2}{G r_2} \\ m_2 = \dfrac{r^2 v_1{}^2}{G r_1} \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \underline{\begin{cases} m_1 = 6\times10^{30}\,\mathrm{kg} \\ m_2 = 3\times10^{30}\,\mathrm{kg} \end{cases}}$$

4.1) 図２より，有効数字１桁で，$\alpha = \underline{4}$



4.2)

前問の結果より，$L_i = L_{Sun}\left(\dfrac{m_i}{M_{Sun}}\right)^4$ と書けるから，

$$L_1 = \underline{3\times10^{28}\,\mathrm{Watt}}$$
$$L_2 = \underline{2\times10^{27}\,\mathrm{Watt}}$$

4.3) 連星系の全輝度を半径 d の円周上で測定するから，光度 I_0 は,

$$I_0 = \frac{L_1 + L_2}{4\pi d^2} \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{4\pi I_0}} = 7.3\times10^{17} \fallingdotseq 7\times10^{17}\ \mathrm{m} \ = 77 \fallingdotseq \underline{80\,\mathrm{ly}}$$

4.4) $$\theta \cong \tan\theta = \frac{r}{d} = \underline{1\times10^{-8}\ \mathrm{rad}}$$

4.5) 波長の平均的な値を λ_0 とすると，光の回折現象による分解能の議論より,

$$D = \frac{d\,\lambda_0}{r} = 43 \fallingdotseq \underline{40\,\mathrm{m}}$$