理論問題 1：中性子干渉計における重力　【解答】

空間的配置：ひし形の各辺の長さは $L=\dfrac{a}{\cos\theta}$ であり，相対する平行な辺の間の距離は，$D=\dfrac{a}{\cos\theta}\sin 2\theta = 2a\sin\theta$ である。

1.1　ひし形の面積は，

$$A = LD = \underline{2a^2\tan\theta}$$

1.2　角 ϕ だけ傾けたとき，入り口 IN からの出口 OUT1 の高さ H は，

$$H = D\sin\phi = \underline{2a\sin\theta\sin\phi}$$

波長比

1.3　IN と OUT につながった長さ L の２辺のみが重要である。IN への入射中性子のド・ブロイ波長を λ_0，OUT1 からの出射中性子のド・ブロイ波長を λ_1 とすると，波長比の差は，

$$\Delta N_{\text{opt}} = \frac{L}{\lambda_0} - \frac{L}{\lambda_1} = \frac{a}{\lambda_0\cos\theta}\left(1-\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)$$

入射中性子と出射中性子の運動量は，それぞれ $\dfrac{h}{\lambda_0}$，$\dfrac{h}{\lambda_1}$ であるから，力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2M}\left(\frac{h}{\lambda_0}\right)^2 = \frac{1}{2M}\left(\frac{h}{\lambda_1}\right)^2 + MgH$$

$$\therefore \quad \frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \sqrt{1-2\frac{gM^2}{h^2}\lambda_0^2 H}$$

ここで，波長の変化は十分小さいと考えられる。よって，$\dfrac{gM^2}{h^2}\lambda_0^2 H \ll 1$ より，

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = 1 - \frac{gM^2}{h^2}\lambda_0^2 H$$

となり，波長比の差は，

$$\Delta N_{\text{opt}} = \frac{a}{\lambda_0\cos\theta}\frac{gM^2}{h^2}\lambda_0^2 H = \underline{2\frac{gM^2}{h^2}a^2\lambda_0\tan\theta\sin\phi}$$

1.4　ΔN_{opt} を $V = \dfrac{h^2}{gM^2}$ と $A = 2a^2\tan\theta$ を用いて表すと，

$$\Delta N_{\text{opt}} = \underline{\frac{\lambda_0 A}{V}\sin\phi}$$

となり，V を数値で表すと，

$$V = \underline{1.597\times10^{-14}\ \mathrm{m}^3}$$

1.5　２つの経路の波長比の差が整数（$\mathit{\Delta}N_{\mathrm{opt}} = 0, \pm1, \pm2, \cdots$）のとき，干渉により OUT 1 における強度は極大になり，波長比の差が半整数（$\mathit{\Delta}N_{\mathrm{opt}} = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \cdots$）のとき，OUT 1 における強度は極小になる。$\phi$ が $\phi = -90°$ から $\phi = 90°$ までかわると，波長比の差は，$\mathit{\Delta}N_{\mathrm{opt}}\Big|_{\phi=-90°}^{\phi=90°} = \dfrac{2\lambda_0 A}{V}$ となるから，求める強$\rightarrow$弱$\rightarrow$強の回数は，

$$\mathit{\Delta}N = \underline{\frac{2\lambda_0 A}{V}}$$

1.6　実験データより，$A = 10.53\,\mathrm{cm}^2$ となることを用いて，

$$\lambda_0 = \frac{V}{2A}\mathit{\Delta}N = \underline{1.441\times10^{-10}\ \mathrm{m}}$$

1.7　$A = \dfrac{V}{2\lambda_0}\mathit{\Delta}N = \underline{11.98\times10^{-4}\ \mathrm{m}^2}$

理論問題2：運動している棒の観察　【解答】

基本的関係

2.1　写真上に示される位置$\tilde{x}$は，写真が撮られる時刻よりも時間Tだけ前に光が発せられた位置を示しており，その時間は，

$$T=\frac{\sqrt{D^2+\tilde{x}^2}}{c}$$

で与えられる。

時間Tが経過する間，棒の各部分は距離υTだけ動くので，写真が撮られた時刻の実際の位置xは，

$$x=\tilde{x}+\upsilon T=\underline{\tilde{x}+\beta\sqrt{D^2+\tilde{x}^2}} \qquad \cdots①$$

2.2　①式の両辺を２乗して，

$$(1-\beta^2)\tilde{x}^2-2x\tilde{x}+x^2-\beta^2D^2=0$$

①式よりつねに$x>\tilde{x}$であるから，小さい方の解をとって，

$$\tilde{x}=\underline{\gamma^2x-\beta\gamma\sqrt{D^2+(\gamma x)^2}} \qquad \cdots②$$

棒の見かけの長さ

2.3　ローレンツ収縮により，動いている棒の実際の長さは，L/γであるから，棒の両端の実際の位置は，

$$x_\pm=x_0\pm\frac{L}{2\gamma} \qquad \cdots③$$

である。写真に撮られる棒の両端の像の位置は，③式を②式のxへ代入して，

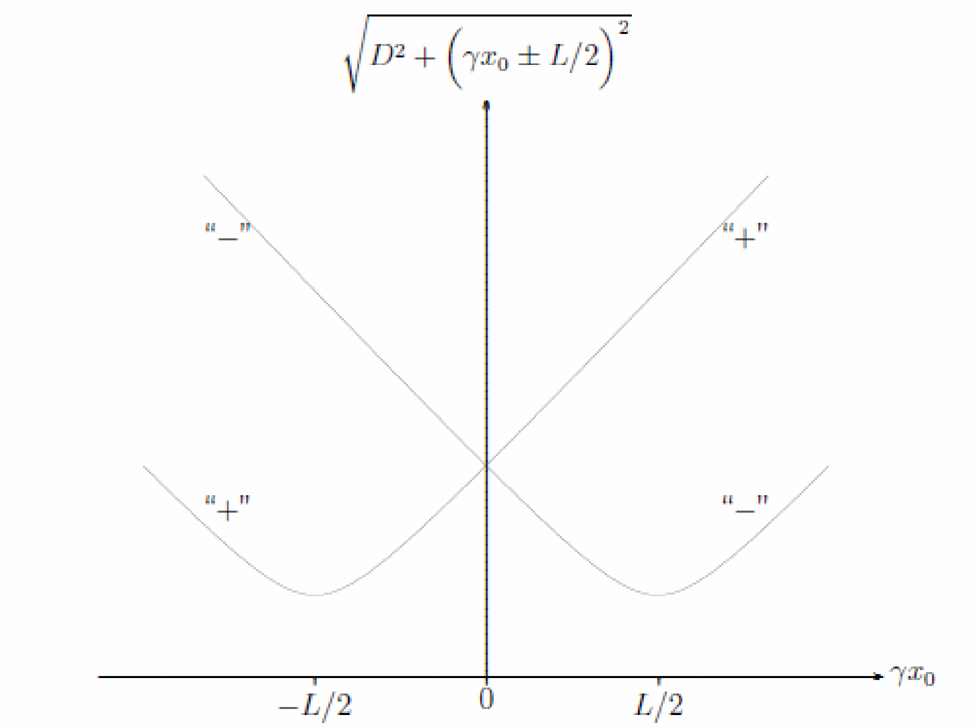
$$\tilde{x}_\pm=\gamma\left(\gamma x_0\pm\frac{L}{2}\right)-\beta\gamma\sqrt{D^2+\left(\gamma x_0\pm\frac{L}{2}\right)^2}$$

よって，棒の見かけの長さは，

$$\tilde{L}(x_0)=\underline{\gamma L+\beta\gamma\sqrt{D^2+\left(\gamma x_0-\frac{L}{2}\right)^2}-\beta\gamma\sqrt{D^2+\left(\gamma x_0+\frac{L}{2}\right)^2}} \qquad \cdots④$$

2.4　棒の後端から発した光がピンホールカメラに達するまでの時間と，棒の先端からカメラに達するまでの時間の差が大きければ大きい程，見かけの棒の長さは長くなる。棒の中心が$x_0<0$のときに発する光については，後端からカメラまでの距離の方が，先端からカメラまでの距離より長いので，その間を光が通過する時間は長くかかり，その時間差は，棒の中心x_0が原点に近づくにしたがって減少し，$x_0=0$となる瞬間に発した光を写真に撮ると，見かけの長さは実際の長さに一致する。棒の中心が$x_0>0$のとき，棒の後端から発した光がカメラに達するまでの時間は先端から達するまでの時間より短く，x_0が増大するにしたがってその時間差は大きくなる。以上より，x軸正方向へ一定の速さ$\upsilon=\dfrac{dx_0}{dt}$で動いている<u>棒のみかけの長さは単調に減少する</u>。

実際，横軸に γx_0 をとったとき，$\sqrt{D^2+\left(\gamma x_0 \pm \frac{L}{2}\right)^2}$ のグラフは下記のようになることからも上の結果を得ることができる。



対称的な写真

2.5 対称的な写真では，棒の先端と後端から発せられた光がピンホールカメラに達するまでの時間が等しいので，見かけの長さは，速度 v で動いている実際の棒の長さに等しい。よって，

$$\tilde{L}=\frac{L}{\gamma} \qquad \cdots⑤$$

2.6 棒の中心が $x_0=0$ となる瞬間に棒の先端と後端で発した光がカメラに達するまでの時間は，$T_0=\frac{1}{c}\sqrt{D^2+\left(\frac{L}{2\gamma}\right)^2}$ であるから，この写真が撮られた瞬間の棒の中心の位置は，

$$x_0=vT_0=\beta\sqrt{D^2+\left(\frac{L}{2\gamma}\right)^2} \qquad \cdots⑥$$

2.7 対称的な写真において，棒の中心の像の位置 $\tilde{x}_0$ は，②式の x に⑥式の x_0 を代入して，

$$\tilde{x}_0=\gamma^2 x_0-\beta\gamma\sqrt{D^2+(\gamma x_0)^2}$$

$$= \beta\gamma\left(\sqrt{(\gamma D)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2} - \sqrt{(\gamma D)^2 + \left(\frac{\beta L}{2}\right)^2}\right)$$

ここで，先端と中心の像の距離は，

$$l = \tilde{x}_+ - \tilde{x}_0 = \frac{L}{2\gamma} - \tilde{x}_0$$

$$\underline{= \frac{L}{2\gamma} - \beta\gamma\sqrt{(\gamma D)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2} + \beta\gamma\sqrt{(\gamma D)^2 + \left(\frac{\beta L}{2}\right)^2}}$$

非常に早い時刻と遅い時刻の写真

2.8 見かけの長さは時間と共に減少するのであるから，見かけの長さは早い時刻の写真では 3m，遅い時刻の写真では 1m である。

2.9 早い時刻と遅い時刻での棒のみかけの長さ $\tilde{L}_\mathrm{e}$ と $\tilde{L}_\mathrm{l}$ は，④式でそれぞれ $x_0 \to -\infty$，$x_0 \to +\infty$ として，

$$\tilde{L}_\mathrm{e} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}L, \quad \tilde{L}_\mathrm{l} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}L \qquad \cdots ⑦$$

となるから，

$$\frac{\tilde{L}_\mathrm{e}}{\tilde{L}_\mathrm{l}} = \frac{1+\beta}{1-\beta} \quad \therefore \quad \beta = \frac{\tilde{L}_\mathrm{e} - \tilde{L}_\mathrm{l}}{\tilde{L}_\mathrm{e} + \tilde{L}_\mathrm{l}} = \frac{1}{2}$$

これより，

$$v = \underline{\frac{1}{2}c}$$

2.10 ⑦式より，

$$L = \sqrt{\tilde{L}_\mathrm{e} \cdot \tilde{L}_\mathrm{l}} = \sqrt{3} = \underline{1.73\ \mathrm{m}}$$

2.11 対称的な写真における棒の見かけの長さは，⑤式より，$\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1-\beta^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ を用いて，

$$\tilde{L} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \underline{1.50\ \mathrm{m}}$$

理論問題３：小問集合【解答】
デジタルカメラ

カメラの解像度は２つの因子，すなわち口径による回折とピクセル（画素）数によって決まる。口径による回折光の角度幅（固有角分解能）θ_R は，レンズの上端と下端を通って平行に進む回折角 θ の光の光路差が１波長 λ に等しいという条件で決まる（単スリットによる光の回折による角度幅の条件を思い出そう）。よって，

$$D\sin\theta = \lambda$$

ここで，$|\theta| \ll 1$ として，$\theta \fallingdotseq \dfrac{\lambda}{D}$ となる。いま，レンズの形状が１辺 D の正方形であれば，$\theta_R = \theta$ となるが，口径が直径 D の円であることから，分母の D はやや小さくなり，

$$\theta_R = 1.22\frac{\lambda}{D}$$

となることが知られている。本問では，係数1.22は付けなくても正解である。

写真を撮るとき，対象物はカメラのレンズから十分遠く離れ，CCD チップはレンズの焦点面（焦点を通り光軸に垂直な面）に置かれている。

3.1　焦点面に置かれたCCDチップ上での最良の空間分解能は，

$$\Delta x_{\min} = f\tan\theta_R \fallingdotseq f\theta_R = \underline{1.22\lambda F\#} \qquad \cdots①$$

ここで，最良の分解能を得る（空間分解能 $\Delta x_{\min}$ を最小にする）ために，F 値として最小のもの $F\# = 2$ をとり，$\lambda = 500\times10^{-9}$ m を用いて，

$$\Delta x_{\min} = \underline{1.22\times10^{-6}\ \mathrm{m}}$$

3.2　正方形の CCD チップの１辺の方向に，分離可能な点を $\dfrac{L}{\Delta x_{\min}}$ 個だけおくことができるから，最良の分解能に対応するピクセル数（画素数）は，

$$N = \left(\frac{L}{\Delta x_{\min}}\right)^2 \approx \underline{823\,\mathrm{Mpix}}$$

3.3　１辺の長さ $L = 35$ mm の CCD チップを用いた $N_0 = 16$ Mpix のカメラを用いると，１辺の方向の空間分解能（隣り合う２点の中心間の距離）は，$l = \dfrac{L}{\sqrt{N_0}}$ であるから，F 値は，①式より，

$$F_0 = \frac{l}{1.22\lambda} = \frac{L}{1.22\lambda\sqrt{N_0}} = 14.34$$

必要なピクセル数をもつ（$N \geq N_0$）ためには，F 値は $F\# \leq F_0$ でなければならないから，

$$F\# = \underline{11}$$

3.4　300 dpi でプリントアウトされた画像の隣り合う２点間の距離は，$l = \dfrac{2.54\times10^{-2}}{300}$ m であるから，これが分離して見えなくなる限界の距離 z は，角度分解能 $\phi = 2\times2.91\times10^{-4}$ rad を用いて，

$$z = \frac{l}{\phi} = \underline{1.45\times10^{-1}\ \mathrm{m}}$$

固ゆで卵

3.5　卵全体が凝固する温度になる必要があるので，温度上昇は，

$$\Delta T = T_{\mathrm{c}} - T_0 = 65 - 4 = 61\,℃$$

卵の体積 $\frac{4}{3}\pi R^3$ を用いて，加えるべきエネルギーは，

$$U = \mu\frac{4}{3}\pi R^3 C\Delta T = \underline{1.68\times10^4\ \mathrm{J}}$$

3.6　卵と沸騰しているお湯の温度差は，$\Delta T = 100 - 4 = 96$ ℃，$\Delta r = R$ として，フーリエの法則より，

$$J = \kappa\Delta T / R = \underline{2.46\times10^3\ \mathrm{W/m^2}}$$

3.7　熱湯から流れ込む熱量は，卵の表面の面積全体から一様に流れ込むとして，

$$P = 4\pi R^2 J = \underline{19.3\,\mathrm{W}}$$

3.8　卵がゆで上がるまでの時間は，

$$\tau = \frac{U}{P} = \underline{870\ \mathrm{s}} = \underline{14.5\,\mathrm{min}}$$

稲妻

3.9　放電される全電気量は，図の三角形の面積より，

$$Q = \frac{1}{2}I_{\max}\tau = \underline{5\,\mathrm{C}}$$

3.10　平均電流は，

$$I = \frac{Q}{\tau} = \underline{50\,\mathrm{kA}}$$

3.11　雷が発生する直前に蓄えている静電エネルギーは $\frac{1}{2}QE_0h = 7.5\times10^8$ J であり，このエネルギーが１回の雷で放電されると考えられる。したがって，１年間に発生する雷の全エネルギーを全人口でわり，100 W の電球を点灯する時間に換算すると，

$$t = 7.5\times10^8 \times \frac{32\times10^6}{6.5\times10^9}\times\frac{1}{100} = \underline{3.69\times10^4\ \mathrm{s}} = \underline{10.3\,\mathrm{h}}$$

毛細血管

長さ $L = 1\times10^{-3}$ m，半径 $r = 4\times10^{-6}$ m の毛細血管を流れる血流の抵抗 R は，

$$R = \frac{8\eta L}{\pi r^4} = 4.48\times10^{16}\ \mathrm{kg/m^4\cdot s}$$

3.12　ポアズイユの法則より，全抵抗は，

$$R_{\mathrm{all}} = \frac{\Delta p}{D} = 10^7\ \mathrm{Pa\cdot s/m^3}$$

同じ N 本の抵抗が並列に接続されると，合成抵抗は $\frac{1}{N}$ 倍になるから，

$$R_{\mathrm{all}} = \frac{R}{N} \quad \therefore \quad N = \frac{R}{R_{\mathrm{all}}} = \underline{4.48\times10^9}\ \text{本}$$

3.13　人の血流 $D = 100\,\mathrm{cm^3/s} = 10^{-4}\ \mathrm{m^3/s}$ は，並列に繋がれた N 本の毛細血管の血流の和であるから，１本の毛細血管の断面積 $\pi r^2 = 5.03\times10^{-11}\ \mathrm{m^2}$ を用いて，

$$v = \frac{D}{N\cdot\pi r^2} = \underline{4.44\times10^{-4}\ \mathrm{m/s}} = \underline{0.444\,\mathrm{mm/s}}$$

超高層ビル

3.14　体積 V の n モルの理想気体の状態方程式より，

$$pV = nRT,\quad (p+dp)(V+dV) = nR(T+dT)$$

$$\therefore \quad \frac{dp}{p} + \frac{dV}{V} = \frac{dT}{T} \qquad \cdots①$$

断熱変化する理想気体の熱力学第１法則より，定積モル比熱を C_v として，

$$0 = nC_v dT + pdV \qquad \cdots②$$

①，②式より dV を消去し，定圧モル比熱を C_p として，

$$C_p - C_v = R,\quad \gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

を用いると，

$$\underline{\frac{dT}{T} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\frac{dp}{p}}$$

（別解）

ポアソンの関係式「$pV^\gamma = $一定」と状態方程式より V を消去して，

$$\frac{T^\gamma}{p^{\gamma-1}} = \text{一定},\quad \therefore \quad T^\gamma \propto p^{\gamma-1} \qquad \cdots③$$

③式の両辺を T で微分すると，

$$\gamma T^{\gamma-1} \propto (\gamma-1)p^{\gamma-2}\frac{dp}{dT} \qquad \cdots④$$

③÷④より，

$$\frac{1}{\gamma}T=\frac{1}{\gamma-1}p\frac{dT}{dp} \quad \therefore \quad \underline{\frac{dT}{T}=\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{dp}{p}} \qquad \cdots⑤$$

3.15　単位断面積で高度差dzの円柱中の窒素分子数をN_nとすると，円柱中の窒素ガスにはたらく力のつり合いは，

$$p(z)=p(z+dz)+N_n mg$$

よって，$dp=p(z+dz)-p(z)$とおいて，

$$dp=-N_n mg \qquad \cdots⑥$$

この窒素ガスの状態方程式は，アボガドロ数をN_Aとして，

$$p\cdot dz=\frac{N_n}{N_\mathrm{A}}RT=N_n kT \qquad \cdots⑦$$

⑥÷⑦式より，

$$\underline{dp=-\frac{mg}{k}\frac{p}{T}dz} \qquad \cdots⑧$$

3.16　⑤，⑧式より，$\dfrac{dp}{p}$を消去して，

$$dT=-\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{mg}{k}dz$$

よって，高度差$H=1000\ \mathrm{m}$を用いて，

$$T_\mathrm{top}=T_\mathrm{bot}-\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{mg}{k}H$$

$$=\underline{20.6\ ℃}$$