国際物理オリンピック

研修用テキストⅡ

電磁気学

【改定版】

特定非営利活動法人 物理オリンピック日本委員会

目 次

*のついた章，節，例題，および小さな字の部分は，やや数学的あるいは専門的である。再読する機会のために後回しにしてもよい。また，例題の解答が式で終わるときには [解答終り] を省略した。

執筆者　東辻浩夫

第 1 章　静電気

1.1　電荷と電荷保存則

物質は分子（原子の集合）によってつくられている。原子は電子と原子核からなり，原子核は陽子と中性子からなる。電子，陽子，中性子のうち，陽子は正の**電荷** (electric charge) をもち，電子は負の電荷をもつ。これらの正負の電荷の絶対値は同じで，これを**電気素量**あるいは**素電荷** (elementary electric charge) といい，通常，記号 e で表す。電荷を測る単位である**クーロン**（coulomb, 記号 C，C. A. de Coulomb に因む）で表すと，電気素量は近似的に

$$e = 1.602 \times 10^{-19}\ \mathrm{C} \tag{1.1}$$

物体のもつ電荷はその物体に含まれる電子・陽子のもつ電荷の代数和である。電荷を**電気量**ともいう。また，電荷をもつ粒子を**荷電粒子** (charged particle) と呼ぶ。

原子・分子の状態変化，化学反応，原子核反応，素粒子反応などあらゆる変化の前後で，電荷の総量（代数和）は一定である。これを**電荷の保存（則）** (conservation of electric charge) という。電荷の保存則は物理の基本法則の一つと考えられている。

電荷の流れが電流である。電流の単位は次式で定義される**アンペア**（ampere, 記号 A，A.-M. Ampère に因む）である。

$$1\ \mathrm{A} = 1\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}} \tag{1.2}$$

電荷は荷電粒子がもっているから，電荷は本来，粒々に（離散的に）分布している。しかし，有限な空間に非常に多数の荷電粒子が存在しているときには，電荷を連続的に分布していると考えてもよい。このとき，点 $\boldsymbol{r}$ を中心とする微小な体積 ΔV の中にある電荷を Δq として，次の極限を

点 $\boldsymbol{r}$ の**電荷密度** (charge density) という。点 $\boldsymbol{r}$ の電荷密度を $\rho(\boldsymbol{r})$ と表せば

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} \tag{1.3}$$

このテキストの電磁気では，電子・陽子は大きさのない点と考える。したがって，文字通り $\Delta V \to 0$ とすると，ΔV の中に含まれる荷電粒子の数は 0 か 1 であり，電荷密度は 0 か ∞ になる。しかしここでは，ΔV が十分多数の荷電粒子を含み，同時に，ΔV の辺の大きさが着目する現象を表すのに十分な細かさをもつところで極限をとどめる。後で現れる電流密度などにおいても同じである。この細かさで見たとき連続関数で表されるというのが「連続的に」の意味である。（文字通り $\Delta V \to 0$ とした，0 か ∞ の値をもつ電荷密度なども有用な概念であるが,「普通の」関数では表せない。このため，デルタ関数が導入された: 10 章 10.2 節参照。）

1.2　クーロンの法則

大きさのない（考えている現象の長さ・距離に比べて）点とみなせる電荷を**点電荷** (point charge) という。図 1.1 のように，2 つの点電荷 q_1 [C] と q_2 [C] が距離 r [m] 離れているとき，これらは互いに次の大きさの力を及ぼしあう。

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \ [\mathrm{N}] \tag{1.4}$$

ここで，分母の ε_0 は**電気定数（真空の誘電率）** (electric constant, permittivity of vacuum) と呼ばれる定数で，その値は次のとおりである（分母の $2.99792458 \cdot 10^8$ は m/s を単位とする真空中の光速)。

$$\varepsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi \times (2.99792458 \cdot 10^8)^2} \ \mathrm{F/m} = 8.854 \times 10^{-12} \ \mathrm{F/m} \tag{1.5}$$

また，単位**ファラッド**（farad, 記号 F，M. Fraday に因む）は次のように定義される。

$$1 \ \mathrm{F} = 1 \ \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}} \tag{1.6}$$

力の向きは 2 つの点電荷を結ぶ線分の向きで，q_1 と q_2 が同符号のとき斥力，異符号のとき引力である。電荷の間に働く力を**クーロン力** (Coulomb force) と呼び，クーロン力の大きさと向きの法則を**クーロンの法則** (Coulomb law) と呼ぶ。

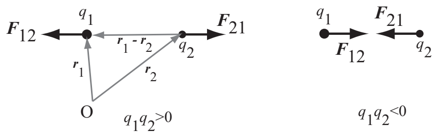

図 1.1: クーロン力（左は同符号で斥力，右は異符号で引力）

ベクトルを用いると，$\boldsymbol{r}_1$ にある点電荷 q_1 が，$\boldsymbol{r}_2$ にある点電荷 q_2 から受ける力 $\boldsymbol{F}_{12}$ は次のように表される。

$$\boldsymbol{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^3} \tag{1.7}$$

また，点電荷 q_2 が点電荷 q_1 から受ける力 $\boldsymbol{F}_{21}$ は

$$\boldsymbol{F}_{21} = \frac{q_2 q_1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|^3} \tag{1.8}$$

であり，作用反作用の法則

$$\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21} \tag{1.9}$$

が成り立っている。

多数の点電荷がある場合，一つの点電荷に働く力は，他の点電荷それぞれからクーロンの法則によって働く力のベクトルとしての和になる。言い換えれば，ある電荷の対の間に働くクーロン力は他の電荷の存在に影響されない。一般に，原因が多数あるときの結果が個々の原因による結果の和であるとき，**重ね合わせの原理** (principle of superposition) が成り立つという。この表現を用いると，**クーロン力は重ね合わせの原理に従う**，あるいは**クーロン力には重ね合わせの原理が成り立つ**。

[**例題 1.1**] 点電荷 q_i $(i = 1, 2, \ldots)$ がそれぞれ $\boldsymbol{r}_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ にあるとき，点 $\boldsymbol{r}$ に置かれた点電荷 q が受ける力は次のように表されることを示せ。

$$\boldsymbol{F} = q \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i|^3} \tag{1.10}$$

[解答] 点電荷 q_i から受ける次の力を重ね合わせれば（加えれば）与式になる。

$$\frac{q_i q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|^3}$$

電荷が**電荷密度** ρ で連続的に分布しているときには，電荷の分布している体積を微小体積に分け，$\boldsymbol{r}_i$ にある微小体積 ΔV_i に含まれる電荷 $\Delta q_i = \rho(\boldsymbol{r})\Delta V_i$ から受ける力を足し合わせて，点電荷 q の受ける力は

$$q\sum_i \frac{\Delta q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|^3} = q\sum_i \frac{\rho(\boldsymbol{r}_i)\Delta V_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|^3}$$

微小体積への分割を無限に細かくすれば，体積 V についての（体積）積分により

$$\boldsymbol{F} = q\int_V \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}dV \tag{1.11}$$

と表される（体積積分については 10 章 10.5.1 節を参照）。

1.3　電場と電位

1.3.1　電場

2 つの点電荷の間に働く力は一方の電荷から他方の電荷に直接及んでいると考えることもできるが，一方の電荷がその周りに他の電荷に力を及ぼすことができるような「**場**」(field) をつくり，他方の電荷は自身が置かれた場所の「場」から力を受けている，と考えることもできる（前者を遠隔作用論，後者を近接作用論という）。この場を**電場**（または**電界**）(electric field) と呼ぶ。

力はベクトルだから電場はベクトル場である。クーロン力の大きさは 2 つの電荷の積に比例するから，電場を単位電荷 (1 C) の受ける力により定義する。すると，電場 $\boldsymbol{E}$ の場所に置かれた電荷 q の受ける力 $\boldsymbol{F}$ は

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} \tag{1.12}$$

電場の単位は N/C であるが，単位**ボルト**（volt, 記号 V，A. G. A. A. Volta に因む）を次のように定義して V/m と表す。

$$1\ \mathrm{V} = 1\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\ \mathrm{m} \tag{1.13}$$

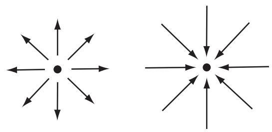

図 1.2: 点電荷の電場（左は正電荷，右は負電荷）

単位ボルトを用いると単位ファラッドは C/V となる。

$$1\ \mathrm{F} = 1\ \frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}} = 1\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{Nm/C}} = 1\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}} \tag{1.14}$$

接線がその点の電場に平行であるような曲線を**電気力線** (line of electric force) という。電気力線は正の電荷から出発し，負の電荷に入るか，無限遠に達する。また，同じ点の電場が 2 つの値をもつことはないから電気力線同士は交わらない。電場の様子は電気力線によって表される。また，電気力線の密度を電場の大きさに比例するようにとることができる（1.4.1 節 [例題 **1.8**] 参照）。

[例題 **1.2**]（点電荷の電場）原点にある点電荷 q が場所 $\boldsymbol{r}$ につくる電場は次式で与えられ，図 1.2 のように表せることを示せ。

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{1.15}$$

また，電場の単位が V/m になっていることを確かめよ。

[解答] (1.7) で $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}$, $q_2 = q$, $\boldsymbol{r}_2 = 0$ (原点), $\boldsymbol{F}_{12} = \boldsymbol{F}$ とすれば

$$\boldsymbol{F} = \frac{q_1 q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\ q_1 \tag{1.16}$$

であるから，電場は与式になり，電気力線は原点から放射状になる。また，単位は $\mathrm{C}/[(\mathrm{F/m})\mathrm{m}^2] = \mathrm{C}/[(\mathrm{C/V})\mathrm{m}] = \mathrm{V/m}$.[解答終り]

多数の点電荷 q_i $(i = 1, 2, \ldots)$ がそれぞれ $\boldsymbol{r}_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ にある場合，$\boldsymbol{r}$ における電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は，(1.10) により

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i|^3} \tag{1.17}$$

また，電荷密度 ρ で分布しているときには，$\boldsymbol{r}$ における電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は (1.11) により次のようになる。

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} dV \tag{1.18}$$

一般に，ある点 $\boldsymbol{r}$ に微小な点電荷 Δq（試電荷）を置いたとき，Δq に働く力が $\Delta\boldsymbol{F}$ であるとすると，点 $\boldsymbol{r}$ の電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は次のように表される。

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \lim_{\Delta q\to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{F}}{\Delta q} \tag{1.19}$$

$\Delta q \to 0$ の極限をとるのは試電荷を置いたことが周りに影響を与えないようにするためである（固定された点電荷の系の場合には，この極限操作は必要ないが，一般には Δq を置くと電荷の分布が変化するから極限をとる）。

また，時間的に配置が変化しない点電荷や電荷密度によってつくられる電場のように，時間的に変化しない電場を**静電場** (static electric field) と呼ぶ。

1.3.2　電位

電場が与えられたとき，図 1.3 のように，1C の点電荷を基準点 O から座標 $\boldsymbol{r}$ の点 P まで運ぶための仕事を（基準点から測った）点 P の**電位** (electric potential) と呼ぶ。基準点と道筋を決めれば電位は座標 $\boldsymbol{r}$ の関数になる。

仕事を求めるには O から P までの道筋を微小な線分 $\Delta\boldsymbol{s}_i$, $(i = 1,\ 2, \ldots, N)$ に分割し，各線分に沿って電荷を運ぶための仕事を求めて足し合わせて，分割を無限に細かくした極限をとる。微小線分 $\Delta\boldsymbol{s}$ での仕事は，電場からの力 $\boldsymbol{E}$ に釣り合う力 $-\boldsymbol{E}$ を加えて $\Delta\boldsymbol{s}$ だけ動かすのだから $-\boldsymbol{E}\cdot\Delta\boldsymbol{s}$ である。したがって O から P までの仕事は

$$V = -\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{E}_i \cdot \Delta\boldsymbol{s}_i$$

右辺の極限の部分を O から P までの道筋に沿った電場の接線成分の線積分と呼び，次のように表す（線積分については 10 章 10.5.3 節参照）。

$$\int_O^P d\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{E} = \int_O^P \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{E}_i \cdot \Delta\boldsymbol{s}_i$$

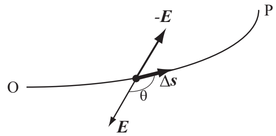

図 1.3: 電位を定義するための積分

このように点 O を基準とした点 P の電位 V は，次のように，O から P までの線積分で表される。

$$V = -\int_O^P d\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{E} \tag{1.20}$$

右辺にマイナスがつくのは，1C の電荷を運ぶ際に，電荷が受ける力と釣り合う力 $-\boldsymbol{E}$ を加えなければならないからである。[力学第 5 章の言葉を用いれば，**電位は 1C の点電荷が電場の中でもつポテンシャル（位置エネルギー）**であり，上式は同章 (5.18) 式に対応する。]

実は，静電場の場合には，(1.20) の右辺の値は**積分の始点と終点だけに依存し，途中の道筋によらない**。式で表すと，任意のループ（閉曲線）C に対して

$$\oint_C d\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{1.21}$$

が成り立つ（記号 $\oint$ は 1 周についての積分であることを表す）。静電場の電位を**静電位** (electrostatic potential) と呼ぶ。積分の道筋に依存しないから，基準点を決めれば静電位は点 $\boldsymbol{r}$ の 1 価の関数である。[力学第 5 章の表現を用いれば,「静電場は電荷に対して保存力場である」。]

式 (1.21) が一つの点電荷のつくる電場に対して成り立つことを具体的に計算して示すことができる（力学第 5 章 5.3 節参照）。複数個の点電荷がある場合でも，各点電荷のつくる電場に対して成り立つから，結局複数個の点電荷がつくる静電場に対して成り立つ（重ね合わせの原理）。また，連続的に分布した電荷の場合，分布した電荷を微小な電荷の集合とみなせるから，連続的な電荷分布の場合にも成り立つことになる。

[以下の小字部分は，最初にこのテキストを読むときには後回しにして（した方が）よい。]

10 章 10.7 節のストークスの定理を用いると，(1.21) は電場 $\boldsymbol{E}$ の回転（ローテーション）rot $\boldsymbol{E}$ の面積分によって

$$\oint_C d\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{E} = \int_S \mathrm{rot}\ \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

と書き直せる。ここで，S は積分路 C を縁とする曲面である（回転については 10 章 10.4.4 節，面積分については 10 章 10.5.2 節を参照）。この式が任意の C（したがって任意の S）について成り立つから，静電場は次の性質をもつ。

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{E} = 0 \tag{1.22}$$

電位の基準は終始一貫していればどこにとってもよいが，取り扱う問題によって適切なとり方がある。可能ならば無限遠を基準にすることが便利なことが多いので，暗黙にそうすることも多い。

電位 V と電荷 q の積 qV は電荷 q のもつポテンシャル（エネルギー）であり，単位は J である。

$$1\ \mathrm{CV} = 1\ (\mathrm{Nm/C})\mathrm{C} = 1\ \mathrm{J} \tag{1.23}$$

点電荷 q が原点にあるとき，無限遠を基準とする点 $\boldsymbol{r}$ の電位 V は次のようになる。

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{1.24}$$

また，多数の点電荷 $q_i\ (i = 1, 2, \ldots)$ がそれぞれ $\boldsymbol{r}_i\ (i = 1, 2, \ldots)$ にある場合の，$\boldsymbol{r}$ における（無限遠を基準とする）電位 $V(\boldsymbol{r})$ は次のようになる。

$$V(\boldsymbol{r}) = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|} \tag{1.25}$$

さらに，電荷が電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ で分布しているときには，$\boldsymbol{r}$ における電位 $V(\boldsymbol{r})$ は次のように体積積分で表される。

$$V(\boldsymbol{r}) = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV \tag{1.26}$$

[例題 1.3] (1.24)，(1.25)，(1.26) を示せ。

[解答] 点電荷 q が原点にあるときは，無限遠から動径方向に沿って積分すれば，次のように (1.24) が得られる。

$$V = -\int_{\infty}^{r} dr \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \left[\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right]_{\infty}^{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

多数の点電荷があるときは，電場は各点電荷のつくる電場の和であるから，電位も各点電荷のつくる電位の和となる。よって，(1.25) が成り立つ。(1.26) も同様である。[解答終り]

1.3.3 電場を電位の勾配で表す

電位 V は力学の位置エネルギーに対応するから，1 C の電荷が受ける力，すなわち電場 $\boldsymbol{E}$，は電位の勾配 (gradient, 記号 grad，または nabla, 記号 $\boldsymbol{\nabla}$) によって次のように表される（10 章 10.4.2 節または力学 5 章 5.4 節参照)。

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla} V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) \tag{1.27}$$

すなわち，**電場は電位の勾配 (grad) に負号をつけたものに等しい。** 勾配に現れる演算子 $\boldsymbol{\nabla}$ を xyz 座標で次のように表されるベクトルと考えてもよい。

$$\boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

[例題 **1.4**] 点電荷 q が原点にあるときの電位 (1.24) から電場を求め，(1.15) と一致することを確かめよ。

[解答] 直角座標 xyz では $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ だから

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

であることに注意すると，

$$\nabla \frac{1}{r} = \left(\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z}\right) \frac{d}{dr}\frac{1}{r} = -\left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}\right)$$

よって一致する。[解答終り]